المميز

في

الرياضيات

للصف الأول الإعدادى
الفصل الدراسى الثانى

أ/ أحمد الششتورى

المميز

في

الجبر

للصف الأول الإعدادى
الفصل الدراسى الثانى

أ/ أحمد الششتورى

الضرب المتكرر

نعلم أن :

$(٣)^{٤} = ٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣ = ٨١$ حيث : ٣ تكررت ٤ مرات فى عملية الضرب
، وتقرأ " ٣ أس ٤ "

ملاحظة :

$(-٣)^{٤} = ٨١$ بينما $(-٣)^{٣} = -٢٧$

أى أن : $(-س)^{م} = (س)^{م}$ إذا كان م عدداً صحيحاً زوجياً

، $(-س)^{م} = -(س)^{م}$ إذا كان م عدداً صحيحاً فردياً

تدريب : أكمل الجدول الآتى :

العدد = س	الأسس " القوى " غير السالبة								
	$س^{٢}$	$س^{٣}$	$س^{٤}$	$س^{٥}$	$س^{٦}$	$س^{٧}$	$س^{٨}$	$س^{٩}$	$س^{١٠}$
٢	٤		١٦			١٢٨			١٠٢٤
– ٢		– ٨						– ٥١٢	
٣			٨١						
– ٣				– ٢٤٣					
٤					٤٠٩٦				
– ٤									
٥									
– ٥									
٦									
– ٦									
٧									
– ٧									
٨									
– ٨									
٩									
– ٩									
١٠									
– ١٠									

إذا كان : $\frac{أ}{ب}$ عدداً نسبياً ، ن عدداً صحيحاً موجباً فإن :

$\left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن} = \frac{أ}{ب} \times \frac{أ}{ب} \times \frac{أ}{ب} \times \cdots \times \frac{أ}{ب}$ حيث $\frac{أ}{ب}$ مكرر كعامل ن من المرات

، ويقرأ $\frac{أ}{ب}$ أس ن أو القوة النونية للعدد $\frac{أ}{ب}$ أى أن : $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن} = \frac{أ^{ن}}{ب^{ن}}$

ملاحظات :

* $(\frac{أ}{ب})^{صفر} = ١$ حيث : أ ≠ صفر

* $(-\frac{أ}{ب})^{ن} = (\frac{أ}{ب})^{ن}$ إذا كانت ن عدد زوجى

* $(-\frac{أ}{ب})^{ن} = -(\frac{أ}{ب})^{ن}$ إذا كانت ن عدد فردى

تدريب : أكمل ما يأتى

(١) $(\frac{١}{٥})^{٣} = ...$

(٢) $(١\frac{١}{٢})^{٤} = ...$

(٣) $(٠,\dot{٥})^{٣} = ...$

(٤) $(٠,٥)^{٤} = ...$

(٥) $(|-٣|)^{٤} = ...$

(٦) $(\frac{٢}{٣})^{٢} \times \frac{٩}{٤} = ...$

(٧) $(-\frac{٥}{٤})^{٢} \times (\frac{٢}{٥})^{٤} = ...$

(٨) $(-\frac{٢}{٥})^{٢} \times (-\frac{٥}{٢})^{٣} \times (\frac{١}{٥})^{صفر} = ...$

(٩) $(\frac{١}{٢})^{٢} \times (-\frac{١}{٢})^{٣} \div (-\frac{١}{٢})^{٤} = ...$

(١٠) $٦\frac{١}{٤} = (.....)^{٢}$

(١١) $٣\frac{٣}{٨} = (.....)^{٣}$

(١٢) إذا كانت : $س = -\frac{١}{٢}$ ، $ص = \frac{١}{٤}$ ، $ع = ٤$ فإن فى أبسط صورة :
$(س + ص)^{٣} \times ع^{٣} = ...$

القوى الصحيحة غير السالبة

نعلم أن :

$(\frac{١}{٢})^{٥} = (\frac{١}{٢}) \times (\frac{١}{٢}) \times (\frac{١}{٢}) \times (\frac{١}{٢}) \times (\frac{١}{٢})$ ، $(\frac{١}{٢})^{٣} = (\frac{١}{٢}) \times (\frac{١}{٢}) \times (\frac{١}{٢})$

و بالتالى فإن :

[١] $(\frac{١}{٢})^{٥} \times (\frac{١}{٢})^{٣} = [(\frac{١}{٢}) \times (\frac{١}{٢}) \times (\frac{١}{٢}) \times (\frac{١}{٢}) \times (\frac{١}{٢})] \times [(\frac{١}{٢}) \times (\frac{١}{٢}) \times (\frac{١}{٢})]$

$= (\frac{١}{٢})^{٨} = (\frac{١}{٢})^{٥+٣}$

[٢] $(\frac{١}{٢})^{٥} \div (\frac{١}{٢})^{٣} = \frac{(\frac{١}{٢}) \times (\frac{١}{٢}) \times \cancel{(\frac{١}{٢})} \times \cancel{(\frac{١}{٢})} \times \cancel{(\frac{١}{٢})}}{\cancel{(\frac{١}{٢})} \times \cancel{(\frac{١}{٢})} \times \cancel{(\frac{١}{٢})}} = (\frac{١}{٢})^{٢} = (\frac{١}{٢})^{٥-٣}$

[٣] $((\frac{١}{٢})^{٥})^{٣} = (\frac{١}{٢})^{٥} \times (\frac{١}{٢})^{٥} \times (\frac{١}{٢})^{٥} = (\frac{١}{٢})^{٥+٥+٥}$ " راجع [١] "

$= (\frac{١}{٢})^{١٥} = (\frac{١}{٢})^{٥\times٣}$

قوانين القوى الصحيحة غير السالبة :

إذا كان : $\frac{أ}{ب}$ عدداً نسبياً ، ن ، م عددين صحيحين غير سالبين فإن :

[١] $(\frac{أ}{ب})^{ن} \times (\frac{أ}{ب})^{م} = (\frac{أ}{ب})^{ن+م}$

" عند ضرب الأساسات المتحدة نجمع الأسس "

[٢] $(\frac{أ}{ب})^{ن} \div (\frac{أ}{ب})^{م} = (\frac{أ}{ب})^{ن-م}$ " حيث $ن \geq م$ " ، $\frac{أ}{ب} \neq$ صفر

" عند قسمة الأساسات المتحدة نطرح الأسس "

[٣] $((\frac{أ}{ب})^{ن})^{م} = (\frac{أ}{ب})^{ن\times م}$

ملاحظات : إذا كان : $\frac{س}{ص}$ ، $\frac{حـ}{ء}$ عددين نسبيين ، ن عدد صحيح غير سالب فإن :

* $(\frac{س}{ص} \times \frac{حـ}{ء})^{ن} = (\frac{س}{ص})^{ن} \times (\frac{حـ}{ء})^{ن}$

* $(\frac{س}{ص} \div \frac{حـ}{ء})^{ن} = (\frac{س}{ص})^{ن} \div (\frac{حـ}{ء})^{ن}$ حيث : $\frac{حـ}{ء} \neq$ صفر

تدريب : أكمل ما يأتى

(١) $(\frac{١}{٥})^{٣} \times (\frac{١}{٥})^{٢} =$ .....

(٢) $(\frac{١}{٢})^{٦} \div (\frac{١}{٢})^{٣} =$ .....

(٣) $(-\frac{٣}{٧})^{٣} \times (-\frac{٣}{٧})^{٥} \div (\frac{٣}{٧})^{٦} =$ .....

(٤) $((\frac{٢}{٣})^{٢})^{٤} =$ .....

(٥) $((-٢\frac{١}{٢})^{٢})^{٢} =$ .....

(٦) $(\frac{٥^{٤} \times ٥^{٣}}{٥^{٦}})^{٢} =$ .....

(٧) إذا كانت : $س = \frac{١}{٢}$ ، $ص = -\frac{٣}{٤}$ ، $ع = \frac{٣}{٢}$ فإن :

$(س^{٢} ع \div ص)^{٢} =$ ..... فى أبسط صورة

القوى الصحيحة السالبة

لاحظ ما يلى :

$٢^{٣} = ٨$

$-١ \qquad \div ٢$

$٢^{٢} = ٤$

$-١ \qquad \div ٢$

$٢^{١} = ٢$

$-١ \qquad \div ٢$

$٢^{٠} = ١$

$-١ \qquad \div ٢$

$٢^{-١} = \frac{١}{٢}$ أى أن : $٢^{-١} = \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢^{١}}$

$-١ \qquad \div ٢$

$٢^{-٢} = \frac{١}{٤}$ أى أن : $٢^{-٢} = \frac{١}{٤} = \frac{١}{٢^{٢}}$

وعلى هذا فإن : إذا كان : س عدداً نسبياً لا يساوى الصفر ، ن عدداً صحيحاً موجباً

فإن : $س^{-ن} = \frac{١}{س^{ن}}$ ، $س^{ن} = \frac{١}{س^{-ن}}$

تدريب : أكمل الجدول التالى :

العدد = س	الأسس " القوى " السالبة								
	$س^{-١}$	$س^{-٢}$	$س^{-٣}$	$س^{-٤}$	$س^{-٥}$	$س^{-٦}$	$س^{-٧}$	$س^{-٨}$	$س^{-٩}$
٢	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٨}$	$\frac{١}{١٦}$					
٣	$\frac{١}{٣}$			$\frac{١}{٨١}$					
٤	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{١٦}$							
٥	$\frac{١}{٥}$								
٦									
٧									
٨									
٩									
١٠	$\frac{١}{١٠}$								

ملاحظات :

إذا كان : س عدداً نسبياً لا يساوى الصفر ، ن عدداً صحيحاً موجباً فإن :

(١) $\text{س}^{\text{ن}} \times \text{س}^{-\text{ن}} = ١$ " المحايد الضربى "

أى أن : كل من $\text{س}^{\text{ن}}$ ، $\text{س}^{-\text{ن}}$ هو المعكوس الضربى للآخر

(٢) **إذا كان س ، ص عددين صحيحين لا يساويان الصفر ، ن عدداً صحيحاً موجباً فإن :**

$$\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)^{-\text{ن}} = \left(\frac{\text{ص}}{\text{س}}\right)^{\text{ن}}$$

فمثلاً : $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{-٣} = \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٣} = \frac{٢٧}{٨}$

(٣) **جميع قوانين للقوى الصحيحة غير السالبة صحيحة فى حالة الصحيحة السالبة**

تدريب : أكمل ما يأتى

(١) $\left(\frac{١}{٥}\right)^{-٣} = \ldots\ldots$

(٢) $\left(-\frac{٣}{٧}\right)^{-٢} = \ldots\ldots$

(٣) $\left(٣^{-٣}\right)^{-١} = \ldots\ldots$

(٤) $\text{س}^{٥} \times \text{س}^{-٣} \times \text{س}^{-٢} = \ldots\ldots$

(٥) $\left(\text{ص}^{٥} \times \text{ص}^{-٢}\right)^{٣} = \ldots\ldots$

(٦) $\left(\text{س}^{٣}\right)^{-٣} \div \left(\text{س}^{-١}\right)^{٢} = \ldots\ldots$

(٧) $\text{س}^{-٢}\left(\text{س}^{٢} + \text{س}^{-١}\right) = \ldots\ldots$

تمارين (١)

١ – أكمل ما يأتى :

(١) $٥\,\text{س}^{\text{صفر}} = \ldots\ldots$

(٢) $(٥\,\text{س})^{\text{صفر}} = \ldots\ldots$

(٣) $\frac{٢٧}{٨} = (\ldots\ldots)^{٣}$

(٤) $-\frac{٦٤}{١٢٥} = (\ldots\ldots)^{٣}$

(٥) $١٥\frac{٥}{٨} = (\ldots\ldots)^{٣}$

(٦) $٠,٤٩ = (\ldots\ldots)^{٢}$

(٧) إذا كان : $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = -\frac{٢}{٥}$ فإن $\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)^{٣} = \ldots\ldots$

(٨) إذا كان : $\text{س} = -٣$ ، $\text{ص} = -٥$ فإن : $\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)^{٢} = \ldots\ldots$

(٩) إذا كان : $\text{س} = \frac{١}{٢}$ ، $\text{ص} = \frac{٢}{٣}$ فإن : $\text{س}^{٢}\,\text{ص}^{٢} = \ldots\ldots$

(١٠) $(٢)^{-٣}\,\text{أ}^{\text{صفر}} = \ldots\ldots$

(١١) $(٣\,\text{س}^{-١})^{٢} = \ldots\ldots$

(١٢) $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} + ٢^{\text{صفر}} - (٢)^{-٢} = \ldots\ldots$

(١٣) $\text{أ}^{-٥} + ١ = \text{أ}^{-٥}\,(\ldots\ldots + \ldots\ldots)$ حيث $\text{أ} \neq$ صفر

٢ – أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $\left(\frac{١}{٢}\right)^{\text{صفر}} + \frac{١}{٤} = \ldots\ldots$

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) $\frac{٥}{٤}$ (د) $\frac{١}{٦}$

(٢) المعكوس الضربى للعدد $\left(\frac{٢}{٥}\right)^{\text{صفر}} = \ldots\ldots$

(أ) $\frac{٥}{٢}$ (ب) $-\frac{٢}{٥}$ (جـ) ١ (د) صفر

(٣) المعكوس الضربى للعدد $(-١)^{٢} = \ldots\ldots$

(أ) $(-١)^{٣}$ (ب) $(-١)^{٢}$ (جـ) $١^{٣}$ (د) $١^{٢}$

(٤) المعكوس الجمعى للعدد $(-٣)^{\text{صفر}} = \ldots\ldots$

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) ٣ (د) $٣^{\text{صفر}}$

(٥) المعكوس الجمعى للعدد $\left(-\frac{٢}{٥}\right)^{٢} = \ldots\ldots$

(أ) $\frac{٤}{٢٥}$ (ب) $-\frac{٤}{٢٥}$ (جـ) $\frac{٢٥}{٤}$ (د) $-\frac{٢٥}{٤}$

(٦) إذا كان : $\text{س} = \text{ص}$ فإن : $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{\text{س} - \text{ص}} = \ldots\ldots$

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (جـ) ١ (د) صفر

(٧) إذا كان : س = $-\frac{١}{٢}$ ، ص = ٣ فإن : $س^{ص}$ = ٠٠٠٠

(أ) $\frac{١}{٨}$ (ب) $-\frac{١}{٨}$ (حـ) $\frac{١}{٦}$ (ء) $-\frac{١}{٦}$

(٨) إذا كان : س = $\frac{١}{٢}$ ، ص = $\frac{٣}{٨}$ فإن : $س^{٣}$ + ص = ٠٠٠٠

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٢}$ (حـ) $\frac{١}{٤}$ (ء) $\frac{١}{١٦}$

(٩) $٥^{٢} + ٥^{٢}$ = ٠٠٠٠

(أ) $١٠^{٢}$ (ب) $١٠^{٤}$ (حـ) $٥^{٤}$ (ء) ٥٠

(١٠) $٣^{١٠} + ٣^{١٠} + ٣^{١٠}$ = ٠٠٠٠

(أ) $٣^{١٠}$ (ب) $٣^{٣٠}$ (حـ) $٩^{١٠}$ (ء) $٣^{١١}$

(١١) ثلث العدد $٣^{١٠}$ = ٠٠٠٠

(أ) $٣^{١٠}$ (ب) $٣^{٩}$ (حـ) $٩^{٥}$ (ء) $٣^{١١}$

(١٢) إذا كان : $أ^{-١} = \frac{٢}{٣}$ فإن : أ = ٠٠٠٠

(أ) $-\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (حـ) $-\frac{٣}{٢}$ (ء) ١

(١٣) إذا كان : أ = $٧^{س}$ ، ب = $٧^{-س}$ فإن : أ × ب = ٠٠٠٠

(أ) $٧^{٢س}$ (ب) $٤٩^{٢س}$ (حـ) صفر (ء) ١

(١٤) إذا كان : $أ^{س}$ = ٢ ، $أ^{-ص}$ = ٣ فإن : $أ^{س-ص}$ = ٠٠٠٠

(أ) ٦ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (حـ) − ١ (ء) ١

(١٥) إذا كان : س $ص^{-١}$ = $\frac{١}{٢}$ فإن : $\frac{ص}{س}$ = ٠٠٠٠

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $-\frac{١}{٢}$ (حـ) ٢ (ء) ١

٣ – أحسب كلاً مما يأتى مع وضع الناتج فى أبسط صورة :

(١) $(٠.\dot{٦})^{٢}$

(٢) $(١ - ١\frac{٢}{٣})^{٢}$

(٣) $(\frac{١}{٢})^{٢} \times (\frac{١}{٢}) \times (\frac{١}{٢})^{٣}$

(٤) $[(\frac{١}{٢})^{٤} + (-\frac{٣}{٤})^{٢}] \times (-١\frac{٣}{٥})$

(٥) $(\frac{٤}{٥})^{٨} \div (\frac{٤}{٥})^{٦} \times \frac{٤}{٥}$

(٦) $\frac{٢^{٦} \times ٢}{٢^{٣} \times ٢^{٤}}$

(٧) $\frac{٣^{٤} \times ٣^{٥}}{٣^{٦}}$

(٨) $\frac{(-٢)^{٦} \times ٢^{٤}}{(-٢)^{٣} \times ٢^{٢}}$

(٩) $\frac{(٤\,\text{س}^{٣}\,\text{ص}^{٢})^{٧}}{(٢\,\text{س}\,\text{ص}^{٢})^{٧}}$

(١٠) $(١\frac{٧}{٩})^{٣} \div (-١\frac{١}{٣})^{٥}$

(١١) $(\frac{٣}{٥})^{١٠} \times (\frac{٥}{٣})^{١٠}$

(١٢) $\frac{٥^{-٧} \times ٥^{٣}}{٥^{-٦}}$

(١٣) $\left(\frac{٤^{-٣} \times ٣}{٤^{-٤}}\right)^{-٢}$

٤ ــ إذا كان : $\text{س} = -\frac{٣}{٢}$ ، $\text{ص} = -\frac{١}{٣}$ أوجد قيمة : $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٣}$

٥ ــ إذا كان : $\text{س} = \frac{٢}{٣}$ ، $\text{ص} = -\frac{٤}{٣}$ أوجد قيمة : $|\,\text{س}^{٣} + \text{ص}^{٣}\,|$

٦ ــ أوجد مساحة المربع الذى طول ضلعه $\frac{٣\,\text{س}}{٥}$ سم

٧ ــ أوجد حجم المكعب الذى طول حرفه $\frac{٤\,\text{ص}}{٧}$ سم

٨ ــ إذا كان : $\text{س} = \frac{٩}{٢}$ ، $\text{ص} = \frac{٣}{٢}$ أثبت أن : $(\frac{\text{س}}{\text{ص}})^{٢} \div ٣\,(\frac{\text{ص}}{\text{س}})^{٢} = ٢٧$

٩ ــ إذا كان أربعة أمثال عدد هو $٤^{٣}$ أوجد : $\frac{٣}{٤}$ هذا العدد

١٠ ــ إذا كان : $\text{س} = \frac{١}{٥}$ ، $\text{ص} = ٥$ أوجد قيمة : $\text{س}^{١٥}\,\text{ص}^{١٤}$

١١ ــ إذا كان : $\text{س} = ٤$ ، $\text{ص} = ٤^{-١}$ أوجد قيمة : $\text{س}^{٥١}\,\text{ص}^{٥٠}$

١٢ ــ أثبت أن : $٣^{١٥} + ٣^{١٤}$ يقبل القسمة على ٤

١٣ ــ أثبت أن : $٥^{\text{س}+٢} - ٥^{\text{س}+١} = ٢٠ \times ٥^{\text{س}}$

١٤ ــ إذا كان : $٢^{\text{ن}} = ٣$ أوجد قيمة : $٢^{\text{ن}+١}$ ، $٤^{\text{ن}}$ ، $٤^{-\text{ن}}$ ، $٢^{\text{ن}-١}$

١٥ ــ أختصر لأبسط صورة : $\frac{٢^{١٠} \times ٣^{٤}}{١٢^{٥}}$

١٦ ــ أختصر لأبسط صورة : $\frac{٦^{٢\text{ن}+١} \times ٤^{-\text{ن}}}{٢^{\text{ن}} \times ٣^{٢\text{ن}+١}}$ ثم أوجد قيمة الناتج عندما $\text{ن} = ٣$

الصورة القياسية للعدد

الصورة القياسية للعدد :

هى طريقة تسهل التعامل مع الأعداد الكبيرة جداً أو الأعداد الصغيرة جداً و تساعد فى إجراء العمليات الحسابية لهذه الأعداد

وهذه الصورة هى : $أ \times ١٠^{ن}$ ، $١ \leq |أ| < ١٠$ ، $ن \in ص$

ملاحظة : أ عدد محصور بين ١ ، ١٠ ، $١٠^{ن}$ عدد يعبر عن قوى العدد ١٠

قوى العدد ١٠ :

$١٠^{١} = ١٠$	$١٠^{٢} = ١٠٠$	$١٠^{٣} = ١٠٠٠$	وهكذا
$١٠^{-١} = \frac{١}{١٠} = ٠,١$	$١٠^{-٢} = \frac{١}{١٠٠} = ٠,٠١$	$١٠^{-٣} = \frac{١}{١٠٠٠} = ٠,٠٠١$	

أمثلة :

(١) ضع العدد ٧٣٠٠٠٠٠٠٠٠ على الصورة القياسية

لاحظ : يجب أن تتحرك العلامة العشرية ٩ خانات لليسار لذا نضرب × $١٠^{٩}$

أى أن : $٧٣٠٠٠٠٠٠٠٠ = ٧,٣ \times ١٠^{٩}$

(٢) ضع العدد ٠,٠٠٠٠٠٠٤٦ على الصورة القياسية

لاحظ : يجب أن تتحرك العلامة العشرية ٧ خانات لليمين لذا نضرب × $١٠^{-٧}$

أى أن : $٠,٠٠٠٠٠٠٤٦ = ٤,٦ \times ١٠^{-٧}$

تدريب :

(١) ضع العدد ٦٥٠٠٠٠٠٠٠٠ على الصورة القياسية

لاحظ : يجب أن تتحرك العلامة العشرية .... خانات لليسار لذا نضرب × ....

أى أن : ٦٥٠٠٠٠٠٠٠٠ = ... × ....

(٢) ضع العدد ٠,٠٠٠٠٠٠١٣٥ على الصورة القياسية

لاحظ : يجب أن تتحرك العلامة العشرية .... خانات لليمين لذا نضرب × ....

أى أن : ٠,٠٠٠٠٠٠١٣٥ = ... × ....

(٣) ضع العدد $٠,٣٤٥ \times ١٠^{-٥}$ على الصورة القياسية

(٤) ضع العدد ٢٥×١٠^{٥} على الصورة القياسية

(٥) أوجد الناتج على الصورة القياسية : $(٤,٥ \times ١٠^{٤}) \times (٨ \times ١٠^{٢})$

$(٤,٥ \times ١٠^{٤}) \times (٨ \times ١٠^{٢}) = (٤,٥ \times ٨) \times (١٠^{٤} \times ١٠^{٢})$

$= ٣٦ \times ١٠^{٦} = ٣,٦ \times ١٠^{٧}$

(٦) أوجد الناتج على الصورة القياسية : $(٦,٦ \times ١٠^{٨}) \times (٣^{٢} \times ١٠^{٣})$

$(٦,٦ \times ١٠^{٨}) \times (٣^{٢} \times ١٠^{٣}) =$ (....) × (....)

= ..... = ...

(٧) أوجد الناتج على الصورة القياسية : $(٤,٨ \times ١٠^{١١}) \div (١,٦ \times ١٠^{-٥})$

$(٤,٨ \times ١٠^{١١}) \div (١,٦ \times ١٠^{-٥}) = (\quad .... \quad) \times (\quad .... \quad)$

$= \quad ..... \quad = \quad ....$

(٨) أوجد الناتج على الصورة القياسية : $(٢٠٠٠٠٠) \times (٦٠٠٠٠)$

$(٢٠٠٠٠٠) \times (٦٠٠٠٠) =$

(٩) أوجد الناتج على الصورة القياسية : $(١٥٠٠٠٠٠) \times (٠,٠٠٥)$

$(١٥٠٠٠٠٠) \times (٠,٠٠٥) =$

(١٠) أوجد الناتج على الصورة القياسية : $(٤٠٠٠٠)^{٣}$

$(٤٠٠٠٠)^{٣} =$

تمارين (٢)

١ ــ أكتب الأعداد الآتية فى الصورة القياسية :

(١) ٩٧٠٠٠٠٠٠٠٠

(٢) ٠,٠٠٠٠٠٠٠٠١٣٤

(٣) ٣١٤,٥٠٠١١٦٦

(٤) ٦ مليون

(٥) $٣٣,٤ \times ١٠^{٤}$

(٦) $٧٠٣,٥ \times ١٠^{-٩}$

(٧) ٩٦×١٠^{٥}

(٨) ٧٨×١٠^{-٧}

(٩) ٧٧٣٢×١٠^{٦}

٢ ــ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $٣,٠٤ \times ١٠^{٧} = ...$

(أ) ٣٤٠٠٠٠ (ب) ٣٠٤٠٠٠٠٠ (ح) ٣٠٤٠٠٠٠ (ء) ٣٤٠٠٠٠٠

(٢) $٥,٣٧ \times ١٠^{-٤} = ...$

(أ) ٠,٠٠٥٣٧ (ب) ٠,٠٠٠٥٣٧ (ح) ٥٣٧٠٠ (ء) ٠,٠٠٠٠٥٣٧

(٣) إذا كان : ٠.٠٠٨٩ = ٨.٩ × ص فإن : ص = ...

(أ) $١٠^{-١}$ (ب) $١٠^{-٣}$ (ح) $١٠^{-٤}$ (ء) $١٠^{٤}$

(٤) إذا كان : $٠,٠٠٥٠٣ = س \times ١٠^{-٥}$ فإن : س = ...

(أ) ٥٠٣ (ب) ٥,٠٣ (ح) ٥٠,٣ (ء) ٠,٥٠٣

(٥) $٦٠٠٠ \times ٥٠ = ...$

(أ) ٣٠٠×١٠^{٢} (ب) ٣٠×١٠^{٥} (ح) ٣×١٠^{٥} (ء) ٣٠×١٠^{٣}

(٦) ٩٠٠ × ٤٥ = ٠٠٠٠٠
(أ) ٤,٠٥ × ١٠^{٢} (ب) ٤,٠٥ × ١٠^{٣} (حـ) ٤,٠٥ × ١٠^{٤} (ء) ٤٥ × ١٠^{٢}

(٦) نصف البليون = ٠٠٠٠٠
(أ) ٥٠ × ١٠^{٨} (ب) ٥ × ١٠^{٨} (حـ) ٠,٥ × ١٠^{٨} (ء) ٥٠٠ × ١٠^{٧}

٣ـ أكتب ناتج كل مما يأتى على الصورة القياسية:

(١) (٦,٤ × ١٠^{٨}) × (١,٥ × ١٠^{٥})
(٢) (٨,٥ × ١٠^{٧}) × (٣,١ × ١٠$^{-٤}$)
(٣) (٣,٨ × ١٠^{٨}) ÷ (١,٩ × ١٠^{٦})
(٤) (٣٥,٥ × ١٠$^{-٤}$) × (٥ × ١٠^{٤})
(٥) (٤,٤ × ١٠^{٣}) × (٣ × ١٠)^{٥}
(٦) (٤,٥٤ × ١٠^{٤}) + (٣,٧٦ × ١٠^{٣})
(٧) (٥,٣ × ١٠^{٨}) – (٠,٨ × ١٠^{٧})
(٨) ٤٠٠ × ٠,٠٠٠٠٠٧
(٩) ٨٠٠٠ ÷ ٠,٠٠٤
(١٠) (٠,٠٠٦)^{٣}

٤ـ أوجد قيمة س فى كل مما يأتى :

(١) ٨٠٠٠٠٠ = ٨ × ١٠^{س}
(٢) ٠,٠٠٠٠٠٠٠٠٦ = ٦ × ١٠^{س}
(٣) (٠,٠٠٤)^{٣} = ١,٦ × ١٠^{س}
(٤) ٧٦٥٩٨ = س × ١٠^{٤}

٥ـ فى العدد ٥,٧٤ × ١٠^{١٥} أوجد عدد الأصفار التى تقع يمين الرقم ٤

٦ـ تبلغ سرعة الضوء ٣٠٠٠٠٠ كم / ث عبر عن سرعة الضوء بالمتر / ث فى الصورة القياسية

٧ـ تبلغ كتلة ذرة الهيدروجين حوالى ٠,٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠١٦٧ جرام
عبر عن ذلك بالصورة القياسية

٨ـ بدون إستخدام الحاسبة أوجد الناتج فى الصورة القياسية :

(١) ١٠^{٣٩} – ١٠^{٣٨}
(٢) ٢^{١٩} × ٥^{١٥}

ترتيب إجراء العمليات الرياضية

عند إجراء العمليات الرياضية :

يجب إتباع قواعد معينة والتى تحدد ترتيب إجراء العمليات الرياضية للوصول إلى الحل الصحيح ، كما أن الآلات الحاسبة و أجهزة الكمبيوتر تتبع نفس الترتيب لإجراء العمليات الرياضية وهى كالآتى :

(١) لترتيب العمليات بدون أقواس : تتبع الخطوات الآتية :

(أولا) نحسب قوى العدد " الأسس " إن وجدت
(ثانيا) نجرى عمليات الضرب والقسمة من اليمين إلى اليسار
(ثالثا) نجرى عمليات الجمع والطرح من اليمين إلى اليسار

تدريب : أحسب قيمة كل مما يأتى :

(١) ٣ + ١٢ ÷ ٦

٣ + ١٢ ÷ ٦ = ٣ + ٢ = ٥ " نقسم ١٢ على ٦ ثم نجمع ٣ "

(٢) ٩ + ٤ × ٣^{٣}

٩ + ٤ × ٣^{٣} = ٩ + ٤ × ٢٧ = ٩ + ١٠٨ = ١١٧

" نوجد القوة الثالثة لعدد ٣ ثم نضرب فى ٤ ثم نجمع ٩ "

(٣) ١٤٤ ـ ٨ ÷ ٢^{٢} =

(٤) ٣ × ٦ ـ ٤ ÷ ٢ =

---

(٢) لترتيب العمليات مع وجود أقواس : تتبع الخطوات الآتية :

(أولا) نحسب قوى العدد " الأسس " إن وجدت
(ثانيا) نجرى العمليات داخل الأقواس الداخلية أولا ثم الأقواس الخارجية
(ثالثا) نجرى عمليات الضرب والقسمة من اليمين إلى اليسار
(رابعا) نجرى عمليات الجمع والطرح من اليمين إلى اليسار

تدريب : أحسب قيمة كل مما يأتى :

(١) ٣ + ٦ × (٥ + ٤) ÷ ٣ ـ ٧

٣ + ٦ × (٥ + ٤) ÷ ٣ ـ ٧ = ٣ + ٦ × ٩ ÷ ٣ ـ ٧ " الأقواس "
= ٣ + ٥٤ ÷ ٣ ـ ٧ " الضرب "
= ٣ + ١٨ ـ ٧ " القسمة "
= ٢١ ـ ٧ " الجمـع "
= ١٤ " الطـرح "

(٢) ٣ [(٣^{٢} + ١) – (٢^{٣} – ٢)]

٣ [(٣^{٢} + ١) – (٢^{٣} – ٢)] = ٣ [(٩ + ١) – (٨ – ٢)] " الأسس "
= ٣ [١٠ – ٦] " الأقواس الداخلية "
= ٣ × ٤ " الأقواس الخارجية "
= ١٢ " الضرب "

(٣) ٢ + ٣ [٥ + (٤ – ١)^{٢}] =

تمارين (٣)

١ – أحسب قيمة كل مما يأتى :

(١) ٥ + ٢ × ٣

(٢) ٤ × ٣ – ١٥ ÷ ٥

(٣) ٤ × ٧ – $٣^{٢}$

(٤) ١٩٦ ÷ $(٧ – ٥)^{٢}$

(٥) ١٨ ÷ (٩ – ٦) × (١ + ٢)

(٦) (٧ – ٤) × ٢ ÷ (٥ – ٣)

(٧) [٤ – (٥ – ٢)] – ١

(٨) (٢٦ + ١) ÷ [(٤ – ٣) ٣]

(٩) (١٥ × ٢) ÷ [(٩ – ٧) – ٥]

(١٠) ٦ ÷ ٣ + [٧ + ٢٠ ÷ (٦ – $٢^{٢}$)]

(١١) ($\frac{٣}{٢}$ × ٣ $\frac{١}{٢}$) ÷ ($\frac{٦}{٥}$ – ١)

(١٢) ١٥,٥ – ٩,٦ ÷ ١,٥ – ١ $\frac{١}{٥}$

(١٣) $\frac{١٥ + ٧}{١٥ – ٤}$

(١٤) $\frac{٥^{٢} – ٥ × ٢}{(١٥ + ٣) ÷ ٦}$

٢ – إذا كانت : س = ٣ أوجد قيمة المقدار : ٢ ($\frac{٥ س + ٣}{٤ س – ٣}$)

٣ – إذا كانت : س = ٢ ، ص = ٥ أوجد قيمة كل من : $(س + ص)^{٢}$ ، $(ص – س)^{٣}$

٤ – أختصر : $\frac{س}{٣}$ (٣ س – ٦) + $\frac{١}{٢}$ (٦ – ٢ س) ثم أوجد قيمة المقدار عندما س = ١

٥ – إذا كانت : س = ٤ (٥ + ٦) – ٦ ، ص = ٩ (٣٦ ÷ ٢١) ÷ ٣

أوجد القيمة العددية للمقدار : ٢ س + ٤ ص

٦ – أوجد المساحة الكلية لمتوازى مستطيلات أبعاده هى : س = ٢ س سم ، ص = ٣ سم

ع = ٥ سم　　" المساحة الكلية لمتوازى المستطيلات = ٢ (س ص + ص ع + ع س)

الجذر التربيعى لعدد نسبى على صورة مربع كامل

أكمل :

العدد	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
مربعه	١		٩			٣٦			٨١	
العدد	ـ ١	ـ ٢	ـ ٣	ـ ٤	ـ ٥	ـ ٦	ـ ٧	ـ ٨	ـ ٩	ـ ١٠
مربعه		٤						٦٤		١٠٠

العدد النسبى المربع الكامل :

إذا كان : س عدداً نسبياً لا يساوى الصفر

فإن : $س^{٢}$ يسمى عدد نسبى مربع كامل وهو موجب دائماً

فمثلاً : العدد ٩ عدد نسبى مربع كامل لأن : $٩ = (٣)^{٢}$ أ، $٩ = (-٣)^{٢}$

، العدد $\frac{١٦}{٤٩}$ عدد نسبى مربع كامل لأن : $\frac{١٦}{٤٩} = (\frac{٤}{٧})^{٢}$ أ، $\frac{١٦}{٤٩} = (-\frac{٤}{٧})^{٢}$

ملاحظات : * إذا علم مربع العدد فالعملية العكسية لإيجاد العدد هى إيجاد الجذر التربيعى للعدد

* يستخدم الرمز $\sqrt{\quad}$ ليدل على الجذر التربيعى الموجب لعدد نسبى
* يستخدم الرمز $-\sqrt{\quad}$ ليدل على الجذر التربيعى السالب لعدد نسبى
* لكل عدد نسبى موجب له جذران تربيعيان أحدهما موجب و الآخر سالب

فمثلاً : $\sqrt{٦٤} = ٨$ ، $-\sqrt{٦٤} = -٨$

، $\pm\sqrt{٦٤} = \pm ٨$ " يدل على الجذرين التربيعيين لعدد ٦٤ "

ملاحظات :

** كل عدد نسبى مربع كامل له جذران تربيعيان كل منهما معكوسا جمعيا للآخر ومربع كل منهما هو العدد المربع الكامل

** يجب كتابة العدد النسبى فى أبسط صورة له قبل إيجاد جذراه التربيعيان

** لا معنى لإيجاد $\sqrt{\frac{س}{ص}}$ إذا كان العدد $\frac{س}{ص} <$ صفر " أى سالباً "
لأنه لا يوجد عدد نسبى إذا ضرب فى نفسه يكون الجواب سالباً

فمثلاً : $\sqrt{-٤}$ لا معنى له

** $\sqrt{(\frac{س}{ص})^{٢}} = |\frac{س}{ص}|$ حيث : $|\frac{س}{ص}| \geq$ صفر

فمثلاً : $\sqrt{(-٣)^{٢}} = |-٣| = ٣$

** $\sqrt{س^{٢} ص^{٢}} = \sqrt{(س ص)^{٢}} = س ص$ حيث : س ص $\geq$ صفر

أى أن : نقسم الأسس ÷ ٢

فمثلاً : $\sqrt{س^{٢} ص^{٦}} = س ص^{٣}$

** عند وجود عملية جمع أو طرح تحت الجذر تجرى العملية أولاً قبل إيجاد الجذر

فمثلاً : $\sqrt{١٠٠ - ٣٦} = \sqrt{٦٤} = ٨$

** إذا صعب إيجاد الجذر التربيعى لعدد ما مباشرة يحلل هذا العدد إلى عوامله الأولية ثم يأخذ من كل عاملين متساويين عاملاً واحداً ، ويكون حاصل ضرب هذه العوامل المأخوذة هو الجذر التربيعى لهذا العدد

فمثلاً : $\sqrt{٤٤١} = \sqrt{٣ \times ٣ \times ٧ \times ٧}$

$= ٣ \times ٧$

$= ٢١$

٤٤١	٣
١٤٧	٣
٤٩	٧
٧	٧
١	

تمارين (٤)

١ – أوجد كل مما يأتى :

(١) $\sqrt{١٦}$

(٢) $-\sqrt{٢٥٠٠}$

(٣) $\pm\sqrt{٠,٨١}$

(٤) $\sqrt{٦ \frac{١}{٤}}$

(٥) $-\sqrt{٤^{٢}}$

(٦) $\pm\sqrt{\left(\frac{٩}{٤٩}\right)^{٢}}$

(٧) $\sqrt{\frac{٤٩ \text{س}^{٤}}{٨١ \text{ص}^{٢}}}$

(٨) $\sqrt{٩} + \sqrt{١٦}$

(٩) $\sqrt{١٦ + ٩}$

(١٠) $\sqrt{٢٢٥ - ٨١}$

(١١) المعكوس الضربى للعدد $\sqrt{٠,٤٩}$

(١٢) المعكوس الضربى للعدد $\sqrt{\frac{٤}{٢٥}}$

(١٣) المعكوس الجمعى للعدد $-\sqrt{١\frac{٧}{٩}}$

(١٤) $\sqrt{\sqrt{٨١}}$

٢ – إذا كان : س = $\sqrt{\frac{١}{٤}}$ ، ص = ٢ أوجد قيمة : س ص

٣ – إذا كان : ٢ س = $\sqrt{٣٦}$ أوجد قيمة : س

٤ – إذا كان : $\frac{س}{٤} = \frac{١٦}{س}$ أوجد قيمة : س

٥ – إذا كان : س = $\sqrt{\frac{١}{٤}}$ أوجد قيمة : $س^{٣}$

٦ – أوجد قيمة : $\sqrt{١} + \sqrt{٤} + \sqrt{٩} + \sqrt{١٦} + \sqrt{٢٥} + \sqrt{٣٦} + \sqrt{٤٩} + \sqrt{٦٤}$

٧ – أختصر لأبسط صورة : $\sqrt{\frac{٤٩}{٤}} \times (\frac{٢}{٧})^{صفر} \times (-\frac{٢}{٧})^{٢}$

٨ – أختصر لأبسط صورة : $(-\frac{١}{٣})^{٢} + \sqrt{\frac{٦٤}{٨١}} - (\frac{٣}{٤})^{صفر}$

٩ – أوجد عددين نسبيين يقعان بين : $\sqrt{\frac{٤}{٩}}$ ، $\frac{٣}{٤}$

١٠ – إذا كان $\frac{٣}{٤}$ مساحة مربع تساوى $١\frac{١١}{٦٤}$ متر مربع أوجد طول ضلعه

١١ – أوجد الجذرين التربيعيين لكل من : ٤٩ × ١٢٢٥ ، ٥ ÷ $\frac{٥}{١٦}$ ، ١٦٨١ – ٨١

١٢ – أكمل لتحصل على عبارة صحيحة :

(١) $\sqrt{١} + \sqrt{٤} + \sqrt{٩} = \sqrt{....}$

(٢) $\sqrt{....} = ٨$

(٣) $\sqrt{٤٩} - \sqrt{٢٥} = \sqrt{....}$

المتغير والثابت

نعلم أن :

(١) الحد الجبرى يتكون من عاملين هما : المعامل " العامل العددى و المتغير " العامل الجبرى (الرمزى)

** ٣ س يسمى حد جبرى

ويسمى ٣ العامل العددى للحد الجبرى " معامل "

، و يسمى س العامل الجبرى للحد الجبرى " متغير "

(٢) المقدار الجبرى يتكون من حدين أو أكثر لذا فهو قد يحتوى على متغير أو أكثر و ثابت " الحد المطلق "

** ٣س + ٤ يسمى مقدار جبرى

ويسمى ٣ العامل العددى للحد الجبرى " معامل "

، و يسمى س العامل الجبرى للحد الجبرى " متغير "

، و يسمى ٤ ثابت المقدار الجبرى

ملاحظات :

* قد يكون الحد الجبرى عبارة عن عامل عددى فقط
* يمكن التعبير عن أى حد جبرى أو أى مقدار جبرى لفظياً

فمثلاً :

٣س يعبر عنه لفظياً كالآتى :

المتغير س مكرر ٣ مرات أى؛ حاصل ضرب العدد ٣ فى المتغير س " ثلاثة أمثال المتغير س "

٣س + ٤ يعبر عنه لفظياً كالآتى :

إضافة [" جمع " أى؛ " زيادة "] العدد الثابت ٤ إلى ثلاثة أمثال المتغير س

تدريب (١) : أكمل الجدول التالى :

التعبير الرمزى	التعبير اللفظى
٤ س	المتغير س مكرر ٤ مرات
٥ س + ١	
ص – ٣	
$\frac{٤}{س}$ حيث س ≠ ٠	قسمة العدد ٤ على المتغير س النسبة بين العدد ٤ والمتغير س
	طرح العدد ٤ من المتغير م
س + ع	جمع المتغير س مع المتغير ع
س ع	
	ثمن شراء عدد س من الأقلام إذا كان ثمن القلم الواحد ٣ جنيهاً
	ثمن القميص س مضافاً إليه ضريبة ٥ جنيهات
	ضعف عمر على منذ ٦ سنوات إذا كان عمره الآن س سنة
	ثمن ٤ كشاكيل سعر الكشكول س جنيهاً و ٣ أقلام سعر القلم ص جنيهاً
	عمر حاتم بعد ١٠ سنوات إذا كان عمره الآن س سنة
	محيط مربع طول ضلعه س سم
	محيط مستطيل عرضه س سم ، وطوله يزيد عن عرضه بمقدار ٧ سم
	العدد النسبى التالى للعدد س
	العدد الزوجى التالى للعدد س
	العدد النسبى السابق للعدد س
	العدد الفردى السابق للعدد س

تدريب (٢) : أكمل الجدول التالى :

المقدار الجبرى	المتغير	الثابت
٥ س	س	لا يوجد
ص – ٥		
٣ س – س		
٣ – ٢ + (س + ٤)		
١٦ + ٣		
$\frac{٤}{س}$ حيث س ≠ ٠		
١٨ – (١٦ ÷ ٤)		

تدريب (٣) : أكمل النمط فى كلاً من الجداول الآتية :

أ

٤	٥	٦	٧
ى	ى + ١	ى + ؟	

ب

٥٤	٥٣	٥٢	٥١
ل	ل – ١	ل – ؟	

حـ

٢	٤	٦	٨
س	٢ س		

ء

٣	٥	٧	٩
ص	ص +		

تدريب (٤) :

كان مع على س جنيهاً يوم السبت ، صرف نصفها يوم الأحد ، وصرف نصف الباقى يوم الأثنين ، ثم صرف نصف ما تبقى معه يوم الثلاثاء ،
كم جنيهاً صرفها على يوم الثلاثاء
وإذا كان معه يوم السبت ٨ جنيهات أحسب ما صرفه على

تدريب (٥) :

إذا تناول أحمد وجبة غذاء فى أحد المطاعم وكان ثمنها س جنيهاً مضافاً إليها ١٥ ٪
من ثمنها خدمة فكم جنيهاً دفعها أحمد ؟

العلاقة الخطية

تسمى العلاقة بين المتغيرين س ، ص : ص = ٲ س + ب

حيث ٲ ≠ صفر ، ٲ ، ب ثوابت ، س ، ص متغيرين من الدرجة الأولى علاقة خطية

ملاحظة :

يسمى س المتغير المستقل ، ص المتغير التابع " المقابل " ، ٲ معامل س ، ب الحد المطلق

فمثلاً : العلاقة ص = ٣ س + ١ هى علاقة من الدرجة الأولى معبراً عنها بالطريقة الرمزية

ويمكن التعبير عنها بعدة طرق :

[١] الطريقة اللفظية : إضافة ١ إلى ثلاثة أمثال المتغير س يعطى المتغير المقابل ص

[٢] أزواج مرتبة : (٢ ، ٧) ، (٣ ، – ١) ، ٠٠٠٠٠ ، هكذا

[٣] جدول :

س	٢	٠	– ١	– ٢	١	٣	– ٣	٤
ص	٧	١	– ٢					

[٤] رمزياً : ص = ٣ س + ١

العلاقة هى مجموعة من الأزواج المرتبة

الزوج المرتب (س ، ص) يتكون من عنصرين س ، ص يسمى س بالمسقط الأول ، ص بالمسقط الثانى

ملاحظات : ** (س ، ص) ≠ (ص ، س) ، (س ، ص) ≠ { ص ، س }

** إذا كان : (س ، ص) = (ٲ ، ب) فإن : س = ٲ ، ص = ب

تدريب (١) : أوجد قيمة كل من س ، ص فى ما يأتى :

(١) (س ، – ٥) = (١ ، ص)

(٢) (٣ س ، ص – ١) = (٦ ، ٦)

تدريب (٢) : أى العلاقات الآتية علاقة خطية بين المتغيرين س ، ص ، وإذا كانت العلاقة خطية أكتب ثلاث أزواج مرتبة تحققها :

(١) ص = ٥ س – ١ علاقة خطية لأن من كل من المتغيرين س ، ص من الدرجة الأولى

الأزواج المرتبة التى تحققها هى : (٠ ، – ١) ، (١ ، ٠٠٠٠٠) ، (– ١ ، ٠٠٠٠٠)

(٢) ص = ٢ س + ٣ علاقة خطية لأن ٠٠٠٠٠

الأزواج المرتبة التى تحققها هى : (٠ ، ٣) ، (٢ ، ٠٠٠٠٠) ، (– ١ ، ٠٠٠٠٠)

(٣) ص ^{٢} + س ^{٢} = ٤ علاقة ليست خطية لأن من كل من المتغيرين س ، ص من الدرجة ٠٠٠٠

(٤) س ص = ٤ علاقة ليست خطية لأن الحد س ص من الدرجة ٠٠٠٠

تدريب (٣) : أى زوج من الأزواج المرتبة الآتية يحقق العلاقة ص = ٣ س – ١

(١ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٠ ، – ١)

تدريب (٤) : إذا كان الزوج المرتب (٤ ، ل) يحقق العلاقة ص = ٢ س – ١ فإن : ل = ٠٠٠٠

نضع س = ٤ ، ص = ل ∴ ل = ٠٠٠٠

التمثيل البيانى للأزواج المرتبة المعبرة عن العلاقة الخطية :

لتمثيل الأزواج المرتبة المعبرة عن العلاقة الخطية نعد نظام إحداثى متعامد " شبكة تربيعية متعامدة " كالآتى :

** نرسم $\overleftrightarrow{\text{س س}'}$ ويسمى محور السينات ،

$\overleftrightarrow{\text{ص ص}'}$ ويسمى محور الصادات

حيث $\overleftrightarrow{\text{س س}'} \perp \overleftrightarrow{\text{ص ص}'}$

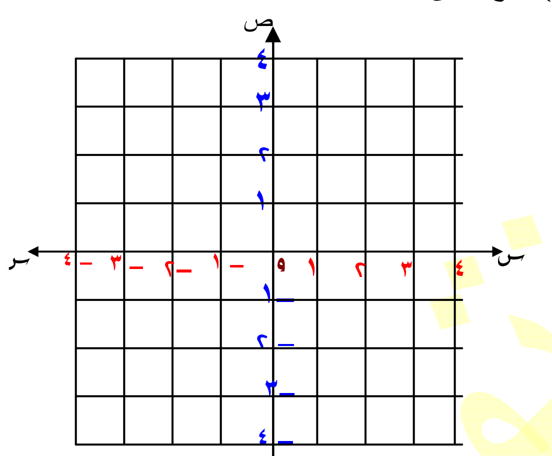
ويتقاطع هذان المحوران فى نقطة " و " التى تسمى نقطة الأصل و تمثل الزوج المرتب (٠ ، ٠)

وكل زوج مرتب تمثله نقطة فى المستوى

** ينقسم هذا النظام إلى ٤ أربع كما فى الشكل المقابل

** لتمثيل النقطة م (٣ ، ٤) على نظام إحداثى متعامد من نقطة " و " ونتحرك على محور السينات إلى اليمين ٣ وحدات " و يسمى الإحداثى السينى " ثم نتحرك لأعلى ٤ " و يسمى الإحداثى الصادى " وحدات وهكذا . . . .

** النقطة (٣ ، ٠) تقع على محور السينات ، النقطة (٠ ، ١) تقع على محور الصادات



تدريب : أذكر الربع الذى تقع فيه النقط الآتية و عينها على الشبكة التربيعية المقابلة :

(١ ، ٣)

(– ١ ، ٢)

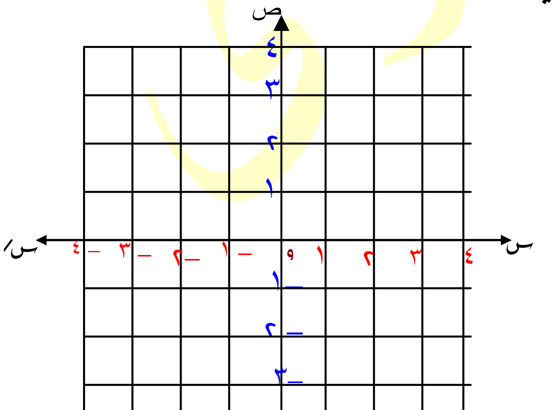
(٣ ، – ١)

(– ٢ ، – ٤)

(٢ ، ٤)

لتمثيل الأزواج المرتبة المعبرة عن العلاقة الخطية بيانياً :

نعين ٣ نقط تمثل ٣ أزواج مرتبة لهذه العلاقة على الشبكة التربيعية و نتأكد بحافة المسطرة أنها تقع على إستقامة واحدة



تدريب : أوجد ٣ أزواج مرتبة تحقق العلاقة : ص = س + ١
ثم عين النقط التى تمثل الأزواج المرتبة على نظام إحداثى متعامد و تأكد أنها تقع على إستقامة واحدة

نضع س =　　　∴ ص =

نضع س =　　　∴ ص =

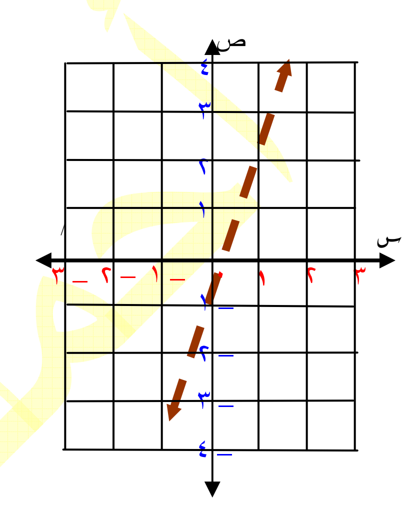
نضع س =　　　∴ ص =

س			
ص			

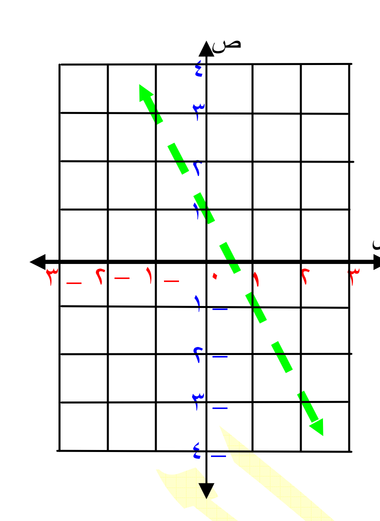
ملاحظات :

عند تمثيل الأزواج المرتبة المعبرة عن العلاقة الخطية ص = ﻫ س + ب بيانياً يلاحظ :

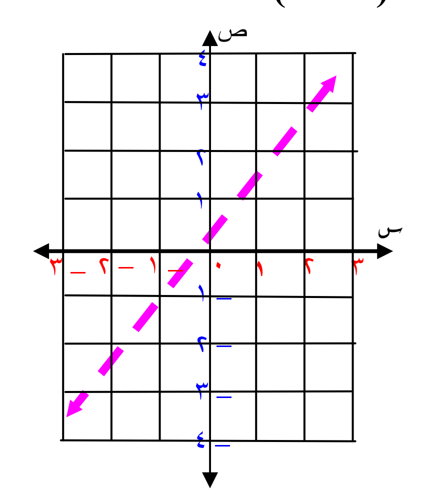
إذا كان : ﻫ > ٠
فإن : حافة المسطرة تصنع زاوية حادة مع الإتجاه الموجب لمحور السينات



إذا كان : ﻫ < ٠
فإن : حافة المسطرة تصنع زاوية منفرجة مع الإتجاه الموجب لمحور السينات



إذا كان : ب = ٠
فإن : ص = ﻫ س
وفى هذه الحالة تكون حافة المسطرة مارة بنقطة الأصل (٠ ، ٠)



تمارين (٥)

١ ـ أوجد قيمة س ، ص فى كل مما يأتى :

(١) (س ، ص) = (٢ ، ٣)
(٢) (س ، ٥) = (٢ ، ص)
(٣) (٦ ، ٤) = (س ، ص)
(٤) (٣ ، ص) = (س ، ـ ١)
(٥) (س ، ص ـ ٢) = (٠ ، ٣)
(٦) (٢ س + ٢ ، ٠) = (٤ ، ص)

٢ ـ عين الربع الذى تقع فيه القط الآتية :

(١) (٢ ، ٣) (٢) (١ ، ٤)
(٣) (٣ ، ٠) (٤) (٠ ، ـ ٥)
(٥) (ـ ١ ، ٣) (٦) (١ ، ـ ١)
(٧) (ـ ٦ ، ـ ٣) (٨) (ـ٩ ، ١١)

٣ ــ أى من الآتى يعبر عن علاقة خطية بين المتغيرين س ، ص :

(١) ص = س + ١ (٢) ص = ٦ س

(٣) $س^٢$ + ص = ٩ (٤) س ص = ٧

(٥) ص = ١ ــ س (٦) س = ــ ص

(٧) س + ص = ٨ (٨) س = ٥ ــ ص

٤ ــ إذا كان : ص = ٢ س ــ ١ عين الأزواج المرتبة التى تحقق العلاقة السابقة عندما

س ∋ {٢ ، ١ ، ٠ ، ــ١ ، ــ ٢}

٥ ــ بإستخدام العلاقة الخطية أكمل الجدول أسفل العلاقة فى كل مما يأتى :

(١) ص = س + ١

س	٠	١	٢
ص			

(٢) ص = س ــ ٢

س	١	٢	٤
ص			

(٣) ب = ﻫ ــ ٤

ﻫ	١	٤	٧
ب			

(٤) ب = ﻫ + ٢

ﻫ	ــ ٣	ــ ١	٠
ب			

٦ ــ إذا كانت : ص = ٢ س + ١ أوجد :

(١) ص عندما س = ٣ (٢) ص عندما س = ــ ٥

(٣) س عندما ص = ١ (٤) س عندما ص = ــ ١

٧ ــ أوجد ثلاثة أزواج مرتبة تحقق كل علاقة فيما يأتى :

(١) ص = س + ٣ (٢) ص = س ــ ٣

(٣) ص = ٣ س + ٢ (٤) ص = ٤ ــ ٢ س

٨ ــ فى كل مما يأتى مجموعة من الأزواج المرتبة تمثل علاقة بين متغيرين أوجد قيمة ك

(١) (١ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ك) ، (٤ ، ٨)

(٢) (١ ، ٥) ، (٢ ، ٦) ، (٣ ، ٧) ، (٤ ، ك)

(٣) (١ ، ٠) ، (ك ، ٧) ، (٦ ، ٥) ، (٣ ، ٢)

٩ ــ أوجد إحداثى النقطة التى تحقق العلاقة : ٣ س + ص = ٤ ، و التى إحداثيها السينى معكوس جمعى لإحداثيها الصادى

١٠ ــ إذا كانت المسافة بين النقطتين ﻫ (٢ ، ٣) ، ب (س ، ٣) تساوى ٤ وحدات فما قيم س الممكنة

١١ ــ إرسم نظام إحداثى متعامد ومثل عليه النقط ﻫ (٣ ، ٢) ، ب (٣ ، ــ ٢) ، حـ (ــ ٣ ، ــ ٢) ء (ــ ٣ ، ٢) و أذكر الربع الذى تقع فيه كل نقطة ، و إذا وصلت النقط الأربعة فما إسم الشكل ﻫ ب حـ ء

الأنماط العددية

النمط العددى : هو مجموعة من الأعداد مرتبة بطريقة معينة

الأنماط العددية وإكمالها وبنائها هى أحد مجالات التطبيق العملى فى الرياضيات و تعمل على تنمية الإبداع وتعتمد على القدرة على ملاحظة العلاقة بين العناصر الموجودة (الأعداد أو الرموز أو الأشكال) و إستنتاج العناصر التالية أو إستنتاج القاعدة العامة " تعميم " لهذا النمط

ملاحظة :

يسمى النمط متتابعة ، وكل عدد يسمى حد ، لإيجاد أى حد ناقص فى النمط " المتتابعة " نعوض فى قاعدة النمط بالأعداد : ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٠٠٠٠٠٠

أمثلة :

(١) : أكمل النمط بكتابة ثلاثة أعداد ، وعبر عنه لفظياً ثم أكتب قاعدة تصف هذا النمط :

٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ ، ٠٠٠٠٠

التعبير اللفظى : يبدأ النمط بالعدد ٥ ثم يضاف ٢ للحصول على العدد التالى له

" أى حد = الحد السابق + ٢

القاعدة الرمزية : ٢ ن + ٣ حيث ن = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٠٠٠٠٠٠

٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ ، ١٣ ، ١٥ ، ١٧

(٢) : أكمل النمط بكتابة ثلاثة أعداد ، وعبر عنه لفظياً ثم أكتب قاعدة تصف هذا النمط :

٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢٠ ، ٠٠٠٠٠

التعبير اللفظى : مضاعفات العدد ٥

القاعدة الرمزية : ٥ ن حيث ن = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٠٠٠٠٠٠

٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢٠ ، ٢٥ ، ٣٠ ، ٣٥

(٣) : أكمل النمط بكتابة ثلاثة أعداد ، وعبر عنه لفظياً ثم أكتب قاعدة تصف هذا النمط :

١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ٠٠٠٠٠

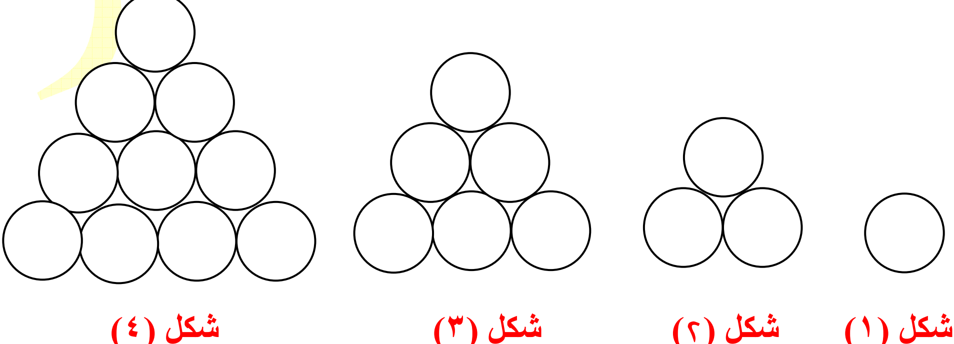
التعبير اللفظى : مربعات الأعداد الصحيحة الموجبة

القاعدة الرمزية : ن^٢ حيث ن = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٠٠٠٠٠٠

١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ٢٥ ، ٣٦ ، ٤٩

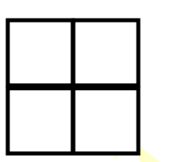
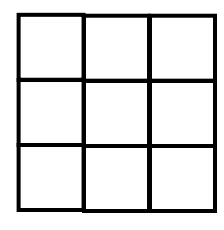
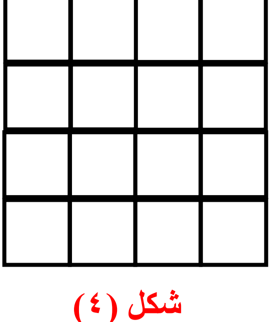
تدريب :

(١) أوجد عدد الدوائر فى كل شكل للنمط التالى ثم إرسم عدد الدوائر بالشكل الخامس و أوجد عددها و كذا عدد الدوائر بالشكل العاشر:



شكل (١) شكل (٢) شكل (٣) شكل (٤) شكل (٥)

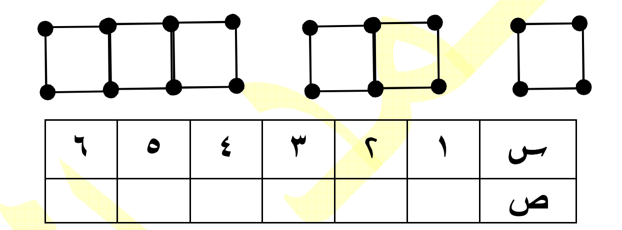
(٢) أوجد عدد المربعات فى كل شكل للنمط التالى ثم إرسم عدد المربعات بالشكل الخامس و أوجد عددها و كذا عدد المربعات بالشكل العاشر:

شكل (١) | **شكل (٢)** | **شكل (٣)** | **شكل (٤)** | **شكل (٥)**

---

(٣) يوضح الشكل مربعات مكونة من عيدان الكبريت ، إذا كان س عدد المربعات ، ص عدد عيدان الكبريت أكمل الجدول المقابل ثم أكتب العلاقة بين : س ، ص



س	١	٢	٣	٤	٥	٦
ص						

تمارين (٦)

١ – أكمل الأنماط التالية بكتابة ثلاثة أعداد :

(١) ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، .....

(٢) ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢ ، .....

(٣) $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٥}$ ، .....

(٤) ٢ ، ٥ ، ١٠ ، ١٧ ، .....

(٥) ٦٠ ، ٥٠ ، ٤١ ، ٣٣ ، .....

(٦) ١ ، ٨ ، ٢٧ ، ٦٤ ، .....

٢ – أكتب أول ثلاثة أعداد فى المتتابعات الآتية (حيث : ن = ١ ، ٢ ، ٣) :

(١) ٢ ن   (٢) $\frac{ن}{٥}$

(٣) ٣ ن – ١   (٤) $ن^{٢}$ + ٣

٣ – عبر لفظياً عن الأنماط العددية الآتية ثم أكتب قاعدة لوصف النمط ثم أوجد العدد العاشر:

(١) ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، .....

(٢) ٢٠ ، ١٨ ، ١٦ ، ١٤ ، .....

(٣) – ٤ ، – ٢ ، ٠ ، ٢ ، .....

(٤) ٠,٤ ، ٠,٦ ، ٠,٨ ، ١ ، .....

٤ ـ فى الشكل المقابل " هرم الأعداد "

** ماذا تلاحظ عن كيفية كتابة الأعداد فى هذا الهرم ؟

** ما هى العلاقة بين رقم الصف والعدد فى نهاية الصف ؟

** أكتب عناصر الصفوف الثلاثة التالية

** ما هو العدد فى نهاية الصف السابع ؟

** ما هو رقم الصف الذى فى نهايته العدد ١٤٤ ؟

١
٢ ٣ ٤
٥ ٦ ٧ ٨ ٩
١٠ ١١ ١٢ ١٣ ١٤ ١٥ ١٦

٥ ـ فى الشكل المقابل " مثلث باسكال "

** ماذا تلاحظ عن كيفية كتابة الأعداد فى هذا المثلث ؟

** أكتشف أنماط عددية بملاحظة الصفوف والأقطار

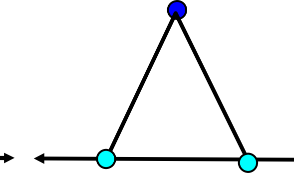
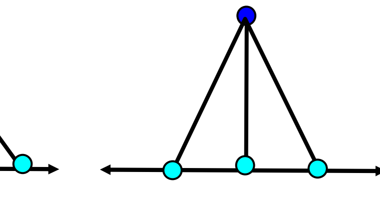
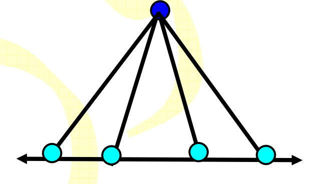
** أكتب عناصر الصفوف الثلاثة التالية

** أوجد مجموع الأعداد فى كل صف ، ماذا تلاحظ ؟

** أوجد مجموع عناصر الصف العشرين دون كتابة عناصره

١
١ ١
١ ٢ ١
١ ٣ ٣ ١
١ ٤ ٦ ٤ ١

٦ ـ فى الشكل المقابل :
نقطة لا تنتمى لمستقيم رسمت منها قطع مستقيمة لنقط تنتمى للمستقيم
هل توجد علاقة بين عدد النقط على المستقيم س ، عدد المثلثات الناتجة ص

المعادلات

فى العلاقة الخطية : ص = ٢ س + ١

إذا كانت ص = ٧ ، س = ١ نجد أن : ٢ × ١ + ١ < ٧

إذا كانت ص = ٧ ، س = ٤ نجد أن : ٢ × ٤ + ١ > ٧

إذا كانت ص = ٧ ، س = ٣ نجد أن : ٢ × ٣ + ١ = ٧

الجملة الرياضية : ٢ س + ١ = ٧ **تسمى معادلة من الدرجة الأولى فى مجهول واحد هو س**

تعاريف :

* **المعادلة هى :** جملة رياضية تحتوى على متغير أو أكثر وتحتوى علاقة التساوى
* **درجة المعادلة هى :** أعلى درجة حد جبرى تحتوى عليه المعادلة
* **حل المعادلة هو :** إيجاد المجهول أو المجاهيل التى تحقق تساوى طرفى المعادلة
* **مجموعة التعويض :** هى المجموعة التى تنتمى إليها قيم مجهول المعادلة (المتغير)
* **مجموعة الحل هى :** المجموعة التى عناصرها تحقق المعادلة
* **المعادلات المتكافئة هى :** معادلات الدرجة الأولى فى مجهول واحد التى لها نفس الحل

ونحصل على المعادلة المكافئة لمعادلة أصلية :

بجمع عدد " لا يساوى الصفر" مع (أو طرح عدد " لا يساوى الصفر" من) طرفى المعادلة
أو ضرب عدد " لا يساوى الصفر" فى طرفى المعادلة
أو قسمة طرفى المعادلة على عدد " لا يساوى الصفر"

ملاحظة :

إذا كان العدد الذى يحقق المعادلة لا ينتمى لمجموعة التعويض فإن مجموعة الحل = $\emptyset$

مثال : حل المعادلة س + ٣ = ٥ علماً بأن مجموعة التعويض هى { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

نعوض فى الطرف الأيمن عن قيمة س بعناصر مجموعة التعويض كالآتى :

عندما س = ١ ∴ الطرف الأيمن = ١ + ٣ = ٤ ≠ ٥ ∴ ١ ليس حل للمعادلة
عندما س = ٢ ∴ الطرف الأيمن = ٢ + ٣ = ٥ ∴ ٢ حل للمعادلة
عندما س = ٣ ∴ الطرف الأيمن = ٣ + ٣ = ٦ ≠ ٥ ∴ ٣ ليس حل للمعادلة
عندما س = ٤ ∴ الطرف الأيمن = ٤ + ٣ = ٧ ≠ ٥ ∴ ٤ ليس حل للمعادلة
∴ س = ٢ هو الحل الوحيد للمعادلة
∴ مجموعة الحل = { ٢ }

تدريب (١) : حل المعادلة س – ١ = ٧ علماً بأن مجموعة التعويض هى { ١ ، ٣ ، ٦ ، ٨ }

نعوض فى الطرف الأيمن عن قيمة س بعناصر مجموعة التعويض كالآتى :

عندما س = ١ ∴ الطرف الأيمن = ... ∴ ....
عندما س = ٢ ∴ الطرف الأيمن = ... ∴ ....
عندما س = ٣ ∴ الطرف الأيمن = ... ∴ ....
عندما س = ٤ ∴ الطرف الأيمن = ... ∴ ....
∴ س = ... هو الحل الوحيد للمعادلة
∴ مجموعة الحل = { .... }

تدريب (٢) : حل المعادلة ٣ س + ١ = ٧ علماً بأن مجموعة التعويض هى { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

نعوض فى الطرف الأيمن عن قيمة س بعناصر مجموعة التعويض كالآتى :

عندما س = ١ ∴ الطرف الأيمن = ... ∴ ....

عندما س = ٢ ∴ الطرف الأيمن = ... ∴ ....

عندما س = ٣ ∴ الطرف الأيمن = ... ∴ ....

عندما س = ٤ ∴ الطرف الأيمن = ... ∴ ....

∴ س = ... هو الحل الوحيد للمعادلة

∴ مجموعة الحل = { .... }

تدريب (٣) : حل المعادلة س × ٣ = س + ٣ علماً بأن مجموعة التعويض هى { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ }

نعوض فى الطرف الأيمن عن قيمة س بعناصر مجموعة التعويض كالآتى :

عندما س = ١ ∴ الطرف الأيمن = ... ∴ ....

عندما س = ٢ ∴ الطرف الأيمن = ... ∴ ....

عندما س = ٣ ∴ الطرف الأيمن = ... ∴ ....

عندما س = ٤ ∴ الطرف الأيمن = ... ∴ ....

∴ مجموعة الحل = { .... }

تدريب (٤) : إذا كانت مجموعة التعويض هى { ١ ، ٠ ، – ١ ، ٣ }

أوجد مجموعة حل : ٣ س + س = ٤ س

نعوض فى الطرف الأيمن عن قيمة س بعناصر مجموعة التعويض كالآتى :

عندما س = ١ ∴ الطرف الأيمن = ... ∴ ....

عندما س = ٠ ∴ الطرف الأيمن = ... ∴ ....

عندما س = – ١ ∴ الطرف الأيمن = ... ∴ ....

عندما س = ٣ ∴ الطرف الأيمن = ... ∴ ....

∴ مجموعة الحل = { .... }

تدريب (٥) : إذا كانت مجموعة التعويض هى { ٤ ، ٠ ، – ١ ، – ٢ }

أوجد مجموعة حل : س + ٣ = ٣ + س

نعوض فى الطرف الأيمن عن قيمة س بعناصر مجموعة التعويض كالآتى :

عندما س = ١ ∴ الطرف الأيمن = ... ∴ ....

عندما س = ٠ ∴ الطرف الأيمن = ... ∴ ....

عندما س = – ١ ∴ الطرف الأيمن = ... ∴ ....

عندما س = ٣ ∴ الطرف الأيمن = ... ∴ ....

∴ مجموعة الحل = { .... }

ملاحظة :

الصورة : ٣ س + س = ٤ س أو الصورة : س + ٣ = ٣ + س

تسمى متطابقة وتحققها جميع عناصر مجموعة التعويض

حل المعادلات من الدرجة الأولى فى مجهول واحد

نظراً لأن طريقة التعويض لإيجاد مجموعة حل المعادلة طويلة وقد تكون مستحيلة إذا كان عدد عناصر مجموعة التعويض لا نهائى مثل " ط ، ص ، ن "
ولأن كل معادلة لها معادلة مكافئة لها ونحصل عليها بإستخدام خواص علاقة التساوى التالى ذكرها بهدف جعل المجهول س منفرداً فى أحد طرفى المعادلة

خواص علاقة التساوى :

إذا كان س ، ص ، ع أعداداً نسبية فإن :

** **الإضافة** : إذا كان س = ص فإن : س + ع = ص + ع
فمثلا : إذا كان س ـ ١ = ٣ فإن س = ٤ (بإضافة ١ للطرفين)

** **الضرب** : إذا كان س = ص فإن : س × ع = ص × ع
فمثلا : إذا كان $\frac{١}{٣}$ س = ٤ فإن س = ١٢ (بضرب الطرفين × ٣)

** **الحذف** : إذا كان س + ص = ص + ع فإن س = ع
فمثلا : إذا كان س + ٣ = ٧ فإن س = ٤ (بطرح ٣ من الطرفين)

** **القسمة** : إذا كان س × ع = ص × ع فإن س = ص ، ع ≠ صفر
فمثلا : إذا كان ٥ س = ١٥ فإن س = ٣ (بقسمة الطرفين على ٥)

مثال : حل المعادلة س + ١ = ٤ و تحقق من الناتج

بإستخدام خاصية المعكوس الجمعى " بإضافة (ـ ١) للطرفين "

∴ س + ١ ـ ١ = ٤ ـ ١ ∴ س = ٣ ∴ مجموعة الحل = { ٣ }

التحقيق : بالتعويض فى المعادلة الأصلية عن س = ٣ ينتج

٣ + ١ = ٤ = الطرف الأيسر ∴ مجموعة الحل = { ٣ }

حل آخر :

∵ س + ١ = ٤ ∴ س + ١ = ٣ + ١ لاحظ أن : ٤ = ٣ + ١ " مكونات العدد ٤

بحذف ١ من الطرفين ∴ مجموعة الحل = { ٣ }

تدريب (١) : حل المعادلة ٣ س = ٩ و تحقق من الناتج

بإستخدام خاصية المعكوس " بضرب الطرفين × "

∴ ٣ س × .... = ٩ × .... ∴ س = ... ∴ مجموعة الحل = { .... }

التحقيق : بالتعويض فى المعادلة الأصلية عن س = ... ينتج

٣ × .... = ٩ = الطرف الأيسر ∴ مجموعة الحل = { .... }

حل آخر :

∵ ٣س = ٩ ∴ ٣س = ٣ × .... لاحظ أن : ٩ = ٣ × .... " مكونات العدد ٩

بحذف .... من الطرفين ∴ مجموعة الحل = { .... }

حل ثالث :

∵ ٣س = ٩ بقسمة الطرفين على .... ∴ س = ...

∴ مجموعة الحل = { .... }

تدريب (٢) : حل المعادلة ٥ س + ١ = ١١ و تحقق من الناتج

بإستخدام خاصية المعكوس " بإضافة ٠٠٠٠ للطرفين "

∴ ٥ س + ١ + ٠٠٠٠ = ١١ + ٠٠٠٠

∴ ٥ س = ٠٠٠٠

بإستخدام خاصية المعكوس " بضرب الطرفين ×

∴ ٥ س = ٠٠٠٠　　∴ س = ٠٠٠٠　　∴ مجموعة الحل = { ٠٠٠٠ }

التحقيق : بالتعويض فى المعادلة الأصلية عن س = ٠٠٠٠ ينتج

٥ × ٠٠٠٠ + ١ = ١١ = الطرف الأيسر

∴ مجموعة الحل = { ٠٠٠٠ }

تدريب (٣) : حل المعادلة ٤ س – ٣ = ٩ حيث س ∈ ط

تدريب (٤) : حل المعادلة س + ٥ = ٦ س – ٥ حيث س ∈ ص

تمارين (٧)

١ ـ أوجد مجموعة الحل لكل مما يأتى :

(١) س + ٢ = ٧ علماً بأن مجموعة التعويض هى { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

(٢) س ـ ٣ = ٢ علماً بأن مجموعة التعويض هى { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

(٣) ٣ س = ٦ علماً بأن مجموعة التعويض هى { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

(٤) ٢ س + ١ = ٥ علماً بأن مجموعة التعويض هى { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

٢ ـ أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية فى ص :

(١) س + ١ = ٥ (٢) س ـ ٤ = ٣

(٣) ٣ س = ١٥ (٤) ٢ س + ٣ = ٥

(٥) ٣ س ـ ٢ = ١٣ (٦) ٤ س + ١٧ = ١

٣ ـ أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية فى ن :

(١) س + ٦ $\frac{١}{٤}$ = ١٢ $\frac{١}{٢}$ (٢) ٣ س ـ ١ $\frac{١}{٢}$ = ٧ $\frac{١}{٢}$

(٣) ٧ س ـ ٦ = ٣ س + ٢ (٤) ٢ (٣ س + ١) = ١٠ ـ ٢ س

(٥) ٣ (٢ س ـ ٦) = ـ ٣ س (٦) ٣ (س ـ ٢) + ٧ (س ـ ١) = ١٢

٤ ـ أكمل ما يأتى :

(١) إذا كانت : س + ٥ = ١١ فإن : ٣ س = ...

(٢) إذا كانت : ٣ س = ٦ فإن : س + ٦ = ...

(٣) إذا كانت : ٢ س ـ ١ = ٧ فإن : $\frac{١}{٢}$ س = ...

(٤) إذا كانت : س + ٢ س + ٣ س + ٤ س = ١٠ فإن : ٣ س = ...

(٥) إذا كانت : مجموعة حل المعادلة : س + ل = ٤ هى { ٣ } فإن : ل = ...

(٦) إذا كانت : مجموعة حل المعادلة : ٣ س + ٢ ل = ٥ هى { ١ } فإن : ل = ...

(٧) مجموعة حل المعادلة س + ... = ٧ فى ص هى { ـ ٢ }

(٨) إذا كان : ص ـ ١ $\frac{١}{٤}$ = ٥ $\frac{١}{٢}$ فإن : ص = ...

(٩) إذا كان : $\frac{س}{٤}$ = $\frac{٢}{٣}$ فإن : $\frac{س}{٢}$ = ...

(١٠) إذا كان : ٢ أ + ٣ = ١٥ فإن : $\frac{١}{٣}$ أ = ...

تطبيقات على حل المعادلات

فى حياتنا اليومية تقابلنا بعض المشكلات و التى نحتاج لحلها معرفة مجهول واحد ٠٠٠
لذا سنستخدم معادلات الدرجة الأولى فى مجهول واحد

خطوات حـــــل المسألة اللفظية :

** نقرأ المشكلة بعناية ثم نحدد المعطيات و المطلوب
** نرمز للمجهول بأحد الرموز وليكن س
** نضع المعطيات على شكل معادلة من الدرجة الأولى وتحل كالسابق

الجدول التالى يوضح نماذج للتعبير عن المجهول وليكن " س " :

التعبير اللفظى	التعبير الرمزى
المعكوس الجمعى للعدد	– س
المعكوس الضربى للعدد	$\frac{١}{س}$
ضعف العدد	٢ س
ثلاثة أمثال العدد	٣ س
العدد الذى يليه مباشرة	س + ١
العدد السابق له مباشرة	س – ١
العدد الفردى (الزوجى) التالى له مباشرة	س + ٢
العدد الفردى (الزوجى) له مباشرة	س – ٢
الأعداد التالية	س + ١ ، س + ٢ ، ٠٠٠٠٠
الأعداد السابقة	س – ١ ، س – ٢ ، ٠٠٠٠٠
الأعداد الفردية (الزوجية) التالية	س + ٢ ، س + ٤ ، ٠٠٠٠٠
الأعداد الفردية (الزوجية) السابقة	س – ٢ ، س – ٤ ، ٠٠٠٠٠
العمر منذ ٥ سنوات	س – ٥
العمر بعد ٣ سنوات	س + ٣
يزيد عن عدد آخر بمقدار ٣	س + ٣
يقل عن عدد آخر بمقدار ٣	س – ٣
يزيد عن ضعف عدد آخر بمقدار ٣	٢ س + ٣
يقل عن ضعف عدد آخر بمقدار ٣	٢ س – ٣
مربع العدد	$س^{٢}$
تذكر : محيط المستطيل	(الطول + العرض) × ٢
تذكر : مساحة سطح المستطيل	الطول × العرض
تذكر : محيط المربع	طول الضلع × ٤
تذكر : مساحة سطح المربع	طول الضلع × نفسه

مثال (١) :

مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٥ سم فإذا كان محيطه ٧٠ سم فأوجد بعدى المستطيل

الحل

نفرض أن عرض المستطيل = س ∴ طوله = س + ٥

∵ محيط المستطيل = ٢× (الطول + العرض) = ٧٠

∴ ٢ × (س + ٥ + س) = ٧٠ ∴ ٢ × (٢ س + ٥) = ٧٠

∴ ٤ س + ١٠ = ٧٠ ∴ ٤ س = ٦٠

ومنها : س = ١٥ ∴ العرض = ١٥ سم

∴ الطول = ٥ + ١٥ = ٢٠ سم

مثال (٢) :

زاويتان متكاملتان إحداهما ثلاثة أمثال الأخرى أوجد قياس كل منهما

الحل

نفرض أن قياس الزاوية الصغرى = س ∴ قياس الزاوية الكبرى = ٣ س

∵ الزاويتان متكاملتان ∴ المجموع = ٣ س + س = ١٨٠

∴ ٤ س = ١٨٠ بالقسمة على ٤ ∴ س = ٤٥

∴ قياس الزاوية الصغرى = ٤٥° ، قياس الزاوية الكبرى = ٣ × ٤٥ = ١٣٥°

تدريب (١) :

عددان طبيعيان أحدهما ثلاثة أمثال الآخر فإذا كان مجموعهما ١٦ فأوجد العددين

الحل

نفرض أن : أحد العددين = س ∴ العدد الآخر = ...

∵ مجموع العددين = ١٦ ∴ س + ... = ١٦

∴ .... = ١٦ بالقسمة على .... ∴ س = ...

∴ أحد العددين هو ..... ∴ العدد الآخر = ...

تدريب (٢) :

عمر رجل الآن يزيد عن عمر أبنه بمقدار ٣٢ سنة ، وبعد ١٠ سنوات يصبح عمر الرجل ثلاثة أمثال عمر أبنه أوجد كل منهما الآن

الحل

نفرض أن : عمر الأبن الآن = س سنة ∴ عمر الرجل الآن = ... سنة

∴ بعد ١٠ سنوات : يصبح عمر الأبن = س + ١٠ سنة ، عمر الرجل = ... سنة

∵ بعد ١٠ سنوات يصبح عمر الرجل ثلاثة أمثال الأبن

∴ س + ... = ٣ (س + ١٠) ∴ س + ... = ٣ س + ...

∴ ٣ س − س = ... ∴ ٢ س = ... ∴ س = ...

∴ عمر الأبن = ... سنة ∴ عمر الرجل = ...

تمارين (٨)

١ ـ عدد إذا أضيف إلى مربعه ٦ كان الناتج مساوياً ١٤ فما هو هذا العدد ؟

٢ ـ عددان طبيعيان أحدهما ضعف الآخر فإذا كان مجموعهما ١٠٨ فأوجد العددين

٣ ـ عددان طبيعيان متتاليان مجموعهما ١٩ أوجد العددين

٤ ـ ثلاثة أعداد طبيعية متتالية مجموعهم ١٢ أوجد الأعداد

٥ ـ عددان زوجيان متتاليان مجموعهما ١٤ أوجد العددين

٦ ـ ثلاثة أعداد فردية متتالية مجموعهم ٢٧ أوجد هذه الأعداد

٧ ـ مستطيل طوله (٢ س + ٧) سم ، عرضه (س + ٥) سم فإذا كان محيطه ٥٤ سم أوجد بعديه

٨ ـ مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٥ سم ، ومحيطه ٤٦ سم أوجد بعديه

٩ ـ إذا كان طول ضلع مربع يساوى طول ضلع مثلث متساوى الأضلاع وكان مجموع محيطيهما ٢٨ سم أوجد طول ضلع كل منهما

١٠ ـ عمر أب يزيد عن ثلاثة أمثال عمر أبنه بمقدار ٥ سنوات فإذا كان الفرق بين عمريهما ٢٥ سنة أوجد عمر كل منهما

١١ ـ رجل عمره الآن ثلاثة أمثال عمر أبنه وبعد سنتين يصبح مجموع عمريهما ٥٢ سنة أوجد عمر كل منهما

١٢ ـ عدد مكون من ثلاثة أرقام مجمعها ١٧ ، رقم آحاده ضعف رقم عشراته ، رقم المئات ينقص عن ثلاثة أمثال رقم العشرات بمقدار ١ أوجد هذا العدد

١٣ ـ إذا كان ثمن متر الصوف يزيد جنيهين عن ثمن متر الحرير وكان ثمن ٤ أمتار من الصوف ، ٣ أمتار من الحرير يساوى ٦٧٣ جنيهاَ أوجد ثمن المتر من كل من الصوف والحرير

١٤ ـ إذا كانت قياسات زوايا مثلث هى : س ، ٣ س ، ٨ س أوجد قياس كل زاوية منها بالدرجات

١٥ ـ زاويتان متتامتان قياساهما ٢ س ، (٢ س ـ ١٨) أوجد قياس كل منهما بالدرجات

١٦ ـ عددان نسبيان أكبرهما س + ٢ ومجموعهما ١٥ أوجد العددين

١٧ ـ مستطيل محيطه ٥٠ سم ، النسبة بين بعديه ٢ : ٣ أوجد مساحة المستطيل

المتباينات

فى العلاقة الخطية : ص = ٢ س + ١

إذا كانت ص = ٧ ، س = ١ نجد أن : ٢ × ١ + ١ > ٧

إذا كانت ص = ٧ ، س = ٤ نجد أن : ٢ × ٤ + ١ < ٧

الجملة الرياضية : ٢ × ١ + ١ > ٧ **و الجملة الرياضية :** ٢ × ٤ + ١ < ٧

تسمى متباينة من الدرجة الأولى فى مجهول واحد هو س

المتباينة : هى الجملة الرياضية التى تحتوى على متغير (أو أكثر) وتتضمن علاقة :

< أو > أو ≤ أو ≥

مجموعة حل المتباينة :

هى مجموعة العناصر التى تنتمى إلى مجموعة التعويض و التى تحقق كل منها المتباينة

فمثلاً :

** س < ٣ ، س ∈ ص فإن مجموعة الحل = { ٤ ، ٥ ، ٦ ، ..... }

** س > ٣ ، س ∈ ص فإن مجموعة الحل = { ٢ ، ١ ، ٠ ، –١ ، –٢ ، ..... }

** س > ٣ ، س ∈ ط فإن مجموعة الحل = { ٢ ، ١ ، ٠ }

** س ≥ ٣ ، س ∈ ط فإن مجموعة الحل = { ٣ ، ٢ ، ١ ، ٠ }

** –٣ ≥ س > ٤ ، س ∈ ص

فإن مجموعة الحل = { –٣ ، –٢ ، –١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ }

ملاحظة : فى المتباينة السابقة إذا كانت : س ∈ ح

فإن مجموعة الحل = { س : س ∈ ح ، –٣ ≥ س > ٤ }

خواص علاقة التباين : إذا كان س ، ص ، ع أعداداً نسبية :

** إذا كان س > ع فإن : س + ص > ص + ع

إضافة (طرح) عدد نسبى إلى طرفى المتباينة لا يؤثر على علاقة التباين

فمثلا : إذا كان س > ٣ فإن : س > ٧ (بإضافة ٤ للطرفين)

؛ إذا كان س > ٣ فإن : س > - ١ (بطرح ٤ من الطرفين)

** إذا كان س > ع ؛ ص > صفر فإن : س ص > ص ع

ضرب (قسمة) طرفى المتباينة فى عدد نسبى موجب لا يؤثر على علاقة التباين

فمثلا : إذا كان : س > ٥ فإن : ٣ س > ١٥ (بضرب الطرفين فى ٣)

؛ إذا كان: ٣ س > ٩ فإن : س > ٣ (بقسمة الطرفين على ٣)

** إذا كان س > ع ؛ ص < صفر فإن : س ص < ص ع

ضرب (قسمة) طرفى المتباينة فى عدد نسبى سالب يغير إتجاه علاقة التباين

فمثلا : إذا كان : س > ٥ فإن – ٣ س < – ١٥ (بضرب الطرفين فى – ٣)

؛ إذا كان : ٣ س > ٩ فإن – س < – ٣ (بقسمة الطرفين على – ٣)

تذكر أن :

مجموعة الأعداد الطبيعية ط = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٠٠٠ }

مجموعة الأعداد الصحيحة ص = { ٠٠٠ ، ـ ٣ ، ـ ٢ ، ـ١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٠٠٠ }

مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ص+ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٠٠٠ }

مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة ص ـ = { ـ ١ ، ـ ٢ ، ـ ٣ ، ٠٠٠٠ }

مجموعة الأعداد الصحيحة غير الموجبة = { ٠ ، ـ ١ ، ـ ٢ ، ـ ٣ ، ٠٠٠٠ }

مجموعة الأعداد الصحيحة غير السالبة = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٠٠٠ }

الصفر ليس موجباً وليس سالباً

تدريب (١) :

أوجد مجموعة حل المتباينة : س + ٣ < ٥ إذا كانت مجموعة التعويض هى :
{ ـ ٢ ، ـ١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ } ومثل مجموعة الحل على خط الأعداد

الحل

نعوض عن قيمة س بكل عنصر من عناصر مجموعة التعويض

عند س = ـ ٢ الطرف الأيمن = ـ ٢ + ٣ = ١
، ∵ ١ < ٥ ∴ ـ ٢ حل للمتباينة

عند س = ٠٠٠٠ الطرف الأيمن = ٠٠٠٠ + ٣ = ٠٠٠٠
، ∵ ٠٠٠٠ ∴ ٠٠٠٠ للمتباينة

عند س = ٠٠٠٠ الطرف الأيمن = ٠٠٠٠ + ٣ = ٠٠٠٠
، ∵ ٠٠٠٠ ∴ ٠٠٠٠ للمتباينة

عند س = ٠٠٠٠ الطرف الأيمن = ٠٠٠٠ + ٣ = ٠٠٠٠
، ∵ ٠٠٠٠ ∴ ٠٠٠٠ للمتباينة

عند س = ٠٠٠٠ الطرف الأيمن = ٠٠٠٠ + ٣ = ٠٠٠٠
، ∵ ٠٠٠٠ ∴ ٠٠٠٠ للمتباينة

عند س = ٠٠٠٠ الطرف الأيمن = ٠٠٠٠ + ٣ = ٠٠٠٠
، ∵ ٠٠٠٠ ∴ ٠٠٠٠ للمتباينة

∴ مجموعة الحل = ٠٠٠٠

ـ٣ ـ٢ ـ١ ٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦

تدريب (٢) :

أوجد مجموعة حل المتباينة : س + ٣ ≤ ٧ حيث : س ∈ ط ، س ∈ ص
ومثل مجموعة الحل على خط الأعداد ثم أوجد مجموعة الحل عندما س ∈ ع

الحل

∵ س + ٣ ≤ ٧ بإضافة ٠٠٠٠ للطرفين

∴ س + ٣ + ٠٠٠٠ ≤ ٧ + ٠٠٠٠ ∴ س ≤ ٠٠٠٠

عندما س ∈ ط مجموعة الحل = ٠٠٠٠

ـ٣ ـ٢ ـ١ ٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦

عندما س ∈ ص مجموعة الحل = ٠٠٠٠

ـ٣ ـ٢ ـ١ ٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦

عندما س ∈ ع مجموعة الحل = ٠٠٠٠

تمارين (٩)

١ ـ أكمل ما يأتى :

(١) مجموعة حل المتباينة : س > ٣ فى ط هى ....
(٢) مجموعة حل المتباينة : س ≤ ١ فى ط هى ....
(٣) مجموعة حل المتباينتين : ١ > س ، س ≤ ٥ معاً فى ص هى ....
(٤) إذا كان : ﺃ > ب ، س = ـ ٣ فإن : ﺃ س .... ب س
(٥) إذا كان : ـ س > ١ فإن : س ....
(٦) إذا كان : ﺃ > ب فإن : ﺃ ـ ٣ .... ب ـ ٣
(٧) إذا كان : س > ـ ٢ فإن : س + ٣ > ....
(٨) إذا كان : ١ ـ س > ٥ فإن : ....
(٩) إذا كان : ـ س > ٢ ، س ∈ ص فإن : مجموعة الحل = ...

٢ ـ أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية فى ط ومثل مجموعة الحل على خط الأعداد :

(١) س + ١ > ٥ (٢) س ـ ٤ ≤ ٣
(٣) ٣ س > ١٥ (٤) ٢ س + ٣ > ٥
(٥) ٣ س ـ ٢ ≤ ١٣ (٦) ٤ س + ١٧ > ١

٣ ـ أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية فى ص ومثل مجموعة الحل على خط الأعداد :

(١) س + ٦ > ٤ (٢) ٣س ـ ١ > ٨
(٣) ٧ س ـ ٦ ≤ ٣ س + ٢ (٤) ١٠ ـ ٢ س ≤ ٦
(٥) ٣ (٢ س ـ ٦) ≤ ـ ٣ س (٦) ٣ (س ـ ٢) + ٧ (س ـ ١) > ١٧

٤ ـ أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية فى ح :

(١) س + ٨ > ٥ س (٢) ٥ > ٣ ـ س
(٣) ٧ س ـ ٢ ≤ ٢ س + ٨ (٤) $\frac{١}{٥}$ ـ س ≤ $\frac{٣}{٥}$
(٥) ٣ (٢ س ـ ٦) ≤ ـ ٣ س (٦) ٤ ـ ٥ (س ـ ٢) > ـ ٢ (ـ ٩ ـ ٢ س)

٥ ـ أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية فى ح :

(١) ١ > س + ٢ > ٥ (٢) ٢ ≤ س ـ ١ ≤ ٤
(٣) ٢ > س + ٢ > ٨ (٤) ٣ > ٢ س ـ ١ ≤ ٧
(٥) ـ ٢ > ٤ ـ ٣ س ≤ ٧ (٦) ٢ > ٢ (س + ١) > ٦

٦ ـ أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينتين الآتيتين معاً فى ص :

٢ س ـ ٣ ≤ ١ ، ٣ ـ ٢ س > ٧

المميز

في

الهندسة

للصف الأول الإعدادى
الفصل الدراسى الثانى

أ/ أحمد الشنتورى

البرهان الإستدلالى

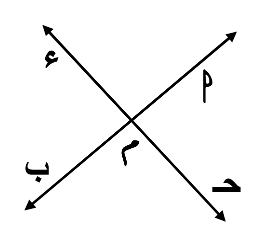
** فى ما سبق أستنتجنا عملياً بإستخدام الأدوات الهندسية فى القياس بعض الخواص والنتائج الهندسية و سوف نستخدم هذه الخواص والنتائج والنظريات فى الإستدلال على الحلول و البراهين للنظريات والتمارين نظرياً دون اللجوء إلى إستخدام الهندسية فى القياس

** خطوات البرهان الإستدلالى :

(١) تحديد المعلومات المتاحة بالمسألة " المعطيات "
(٢) تحديد المراد إيجاده أو إثبات صحته " المطلوب "
(٣) إستخدام المعطيات للوصول إلى المطلوب من خلال ترتيب خطوات لإيجاد أو إثبات صحة المطلوب " البرهان "
(٤) أحياناً تحتاج المسألة لبعض الإضافات فى الرسم لتساعد على البرهان " العمل "
(٥) يستخدم الرمزان (∵) بما أن ، (∴) أذن فى ترتيب خطوات البرهان

** تستخدم النظريات كقاعدة أو قانون فى إستنتاج المعلومات أو حل التمارين ويتم لإثبات صحتها بالبرهان ثم تستخدم فى حل التمارين دون الحاجة إلى إثبات صحتها عند إستخدامها فى حل المسائل المختلفة ومن هذه النظريات :

(١) إذا تقاطع مستقيمان فإن كل زاويتين متقابلتين بالرأس تكونان متساويتين فى القياس



المعطيات : $\overleftrightarrow{ٲ ب}$ ، $\overleftrightarrow{حـ ء}$ مستقيمان متقاطعان فى م

المطلوب : إثبات أن : ق (∠ ٲ م ء) = ق (∠ ب م حـ)

البرهان : ∵ ∠ ٲ م ء ، ∠ ب م حـ متجاورتان

حيث : $\overrightarrow{م حـ} \cup \overrightarrow{م ء} = \overleftrightarrow{حـ ء}$

∴ ق (∠ ٲ م ء) + ق (∠ ٲ م حـ) = ١٨٠°

، ∵ ∠ ٲ م حـ ، ∠ ب م حـ متجاورتان

حيث : $\overrightarrow{م ٲ} \cup \overrightarrow{م ب} = \overleftrightarrow{ٲ ب}$

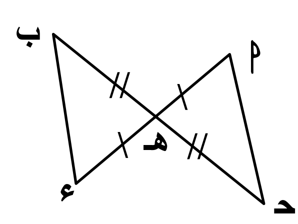
∴ ق (∠ ٲ م حـ) + ق (∠ ب م حـ) = ١٨٠°

∴ ق (∠ ٲ م ء) + ق (∠ ٲ م حـ) + ق (∠ ٲ م حـ) + ق (∠ ب م حـ) = ٣٦٠°

∴ ق (∠ ٲ م ء) = ق (∠ ب م حـ) وهو المطلوب

، بالمثل يمكن إثبات أن : ق (∠ ٲ م حـ) = ق (∠ ب م ء)

مثال : فى الشكل المقابل : $\overline{ٲ ء} \cap \overline{ب حـ}$ = { هـ }
، ٲ هـ = ء هـ ، حـ هـ = ب هـ أثبت أن
Δ ٲ هـ حـ ≡ Δ ء هـ حـ



المعطيات : $\overline{ٲ ء} \cap \overline{ب حـ}$ = { هـ } ، ٲ هـ = ء هـ ، حـ هـ = ب هـ

المطلوب : إثبات أن : Δ ٲ هـ حـ ≡ Δ ء هـ حـ

البرهان : ∵ $\overline{أ ء} \cap \overline{ب حـ} = \{هـ\}$ ، أ هـ = ء هـ ، حـ هـ = ب هـ

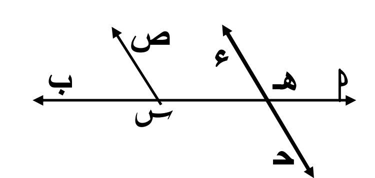
∴ ق (∠ أ هـ حـ) = ق (∠ ء هـ ب) بالتقابل بالرأس

∴ ∆ ∆ أ هـ حـ ، ء هـ حـ فيهما :

أ هـ = ء هـ
حـ هـ = ب هـ
ق (∠ أ هـ حـ) = ق (∠ ء هـ ب) " برهاناً "

∴ ∆ أ هـ حـ ≡ ∆ ء هـ حـ وهو المطلوب

تدريب : فى الشكل المقابل : $\overleftrightarrow{أ ب} \cap \overleftrightarrow{حـ ء} = \{هـ\}$
، $\overleftrightarrow{س ص}$ // $\overleftrightarrow{حـ ء}$ ، س ∈ $\overleftrightarrow{أ ب}$
، ق (∠ ص س ب) = ٤٠° أوجد ق (∠ أ هـ حـ)



المعطيات :

المطلوب :

البرهان : ∵ $\overleftarrow{س ص}$ // " معطى " ، $\overleftrightarrow{أ ب}$ قاطع لهما

∴ ق (∠ ء هـ ب) = ق (∠ ....) بالتناظر

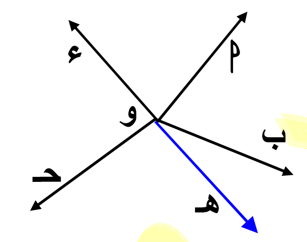
، ∵ $\overleftrightarrow{أ ب} \cap \overleftrightarrow{حـ ء} = \{هـ\}$

∴ ق (∠ أ هـ حـ) = ق (∠ ....) بالتقابل بالرأس

∴ ق (∠ أ هـ حـ) = ...° وهو المطلوب

---

(٢) مجموع قياسات الزوايا المتجاورة المتجمعة حول نقطة يساوى ٣٦٠°



المعطيات : $\overleftarrow{و أ}$ ، $\overleftarrow{و ب}$ ؛ $\overleftarrow{و حـ}$ ، $\overleftarrow{و ء}$ أشعة نقطة البداية لكل منها " و "

المطلوب : إثبات أن : مجموع قياسا الزوايا المتجاورة المتجمعة حول و يساوى ٣٦٠°

العمــل : نرسم $\overleftrightarrow{ء و}$

البرهان : ∵ ق (∠ ب و هـ) + ق (∠ ب و أ) + ق (∠ أ و ء) = ١٨٠°

، ق (∠ هـ و حـ) + ق (∠ حـ و ء) = ١٨٠°

∴ ق (∠ ب و هـ) + ق (∠ ب و أ) + ق (∠ أ و ء) + ق (∠ هـ و حـ)
+ ق (∠ حـ و ء) = ١٨٠° + ١٨٠° = ٣٦٠°

∴ ق (∠ أ و ب) + ق (∠ ب و حـ) + ق (∠ حـ و ء) + ق (∠ ء و أ)
= ٣٦٠° وهو المطلوب

تدريب (١) : فى الشكل المقابل : ق (∠ أ و ب) = ٥٠ ْ
، ق (∠ حـ و ء) = ٦٥ ْ ، ق (∠ هـ و ء) = ٨٠ ْ
، $\overleftarrow{\text{وحـ}}$ ينصف ∠ ب و ء أوجد ق (∠ أ و هـ)

المعطيات :

المطلوب : إيجاد ق (∠ أ و هـ)

البرهان : ∵ $\overleftarrow{\text{وحـ}}$ ينصف ∠ ...... " معطى "

∴ ق (∠ ب و حـ) = ق (∠ ......) = ... ْ

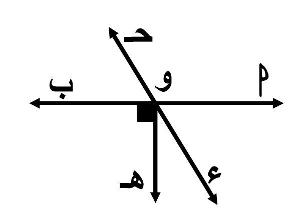
، ∵ ق (∠ أ و ب) + ق (∠ ب و حـ) + ق (∠ حـ و ء) + ق (∠ ء و هـ)
+ ق (∠ أ و هـ) = ... ْ

∴ ق (∠ أ و هـ) = ... ـ ...... = ... ْ

∴ ق (∠ أ و هـ) = ... ْ

∴ Δ أ هـ حـ ≡ Δ ء هـ حـ وهو المطلوب

تدريب (٢) : فى الشكل المقابل : $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ = { و }
، ق (∠ أ و ء) = ٤٦ ْ ، ق (∠ هـ و ب) = ٩٠ ْ
أوجد ق (∠ حـ و ب) ، ق (∠ هـ و حـ)



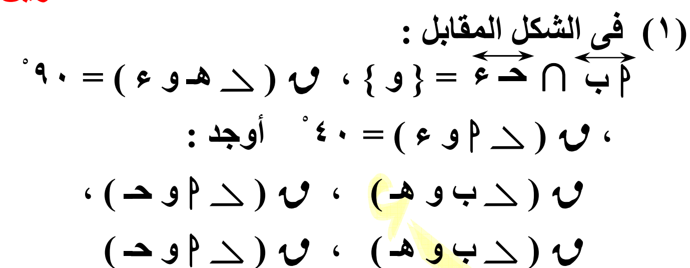
المعطيات :

المطلوب :

البرهان :

أحمد الشنتورى | موجه رياضيات | إدارة كوم أمبو التعليمية
الإميل : a_shantory2007@yahoo.com | منتدى الشنتورى للرياضيات : | http://shantory.yoo7.com

تمارين (١)

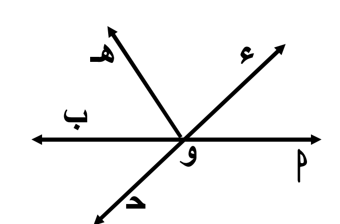


(١) فى الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{أب} \cap \overleftrightarrow{حـء} = \{و\}$ ، ق (∠ هـ و ء) = ٩٠° ، ق (∠ أ و ء) = ٤٠° أوجد :

ق (∠ ب و هـ) ، ق (∠ أ و حـ) ،

ق (∠ ب و هـ) ، ق (∠ أ و حـ)

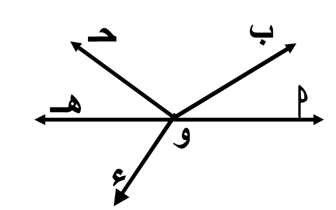


(٢) فى الشكل المقابل :

ق (∠ ب و حـ) = ٢ ق (∠ أ و ب)

، ق (∠ أ و ب) = ٤٨° ، ق (∠ ء و هـ) = ٨٠°

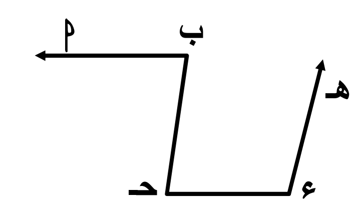
، ق (∠ حـ و هـ) أوجد ق (∠ أ و ء)



(٣) فى الشكل المقابل :

$\overleftarrow{ءحـ}$ // $\overleftarrow{بأ}$ ، $\overline{بحـ}$ // $\overleftarrow{ءهـ}$

، ق (∠ أ ب حـ) = ٤٨° أوجد ق (∠ هـ ء حـ)

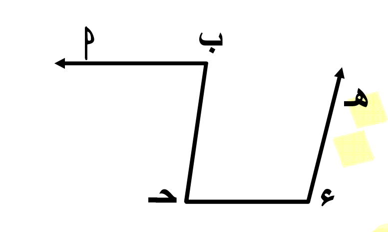


(٤) فى الشكل المقابل :

$\overline{ءحـ}$ // $\overleftarrow{بأ}$ ، ق (∠ أ ب حـ) = ٧٠°

، ق (∠ هـ ء حـ) = ١١٠°

أثبت أن $\overline{بحـ}$ // $\overleftarrow{ءهـ}$



(٥) فى الشكل المقابل :

$\overline{ءحـ}$ // $\overleftarrow{أب}$ ، هـ ∈ $\overleftarrow{أب}$

، ق (∠ حـ ب هـ) = ٤٥° ، ق (∠ ء) = ١٣٥°

أثبت أن $\overline{أء}$ // $\overline{بحـ}$

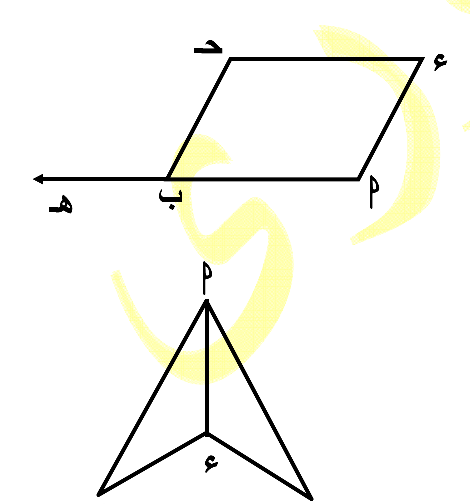
(٦) فى الشكل المقابل :

أب = أحـ ، ب ء = حـ ء

، ق (∠ ب ء حـ) = ١١٠°

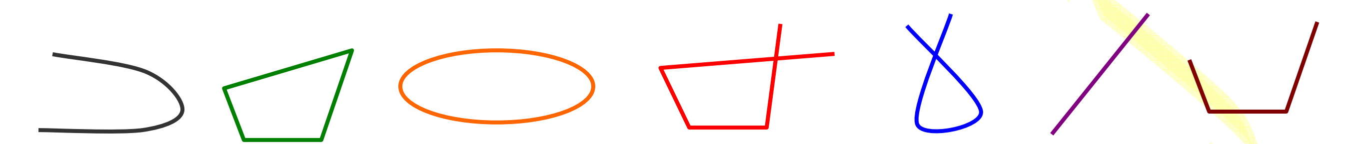
أثبت أن Δ أ ب ء ≡ Δ أ حـ ء

ثم أوجد ق (∠ أ ء حـ)



المضـــــلع

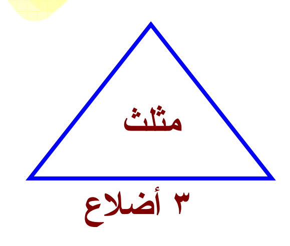
الخط البسيط : هو الخط الذى لا يقطع نفسه
الخط غير البسيط : هو الخط الذى يقطع نفسه
الخط المفتوح : هو الخط الذى نقطة بدايته غير نقطة نهايته
الخط المغلق : هو الخط الذى ينتهى عند النقطة التى بدأ منها
تدريب : فى الأشكال الآتية عين الخط البسيط ، الخط غير البسيط ، الخط المفتوح ، الخط المغلق

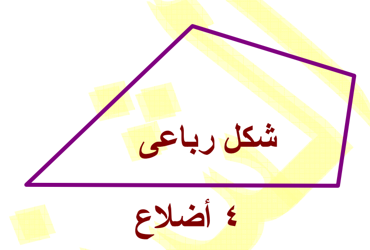


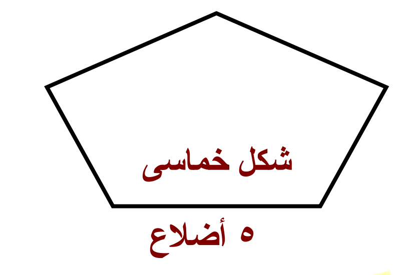
المضلع : هو خط مغلق بسيط مكون من إتحاد عدة قطع مستقيمة

ملاحظات : ** كل قطعة مستقيمة منها تسمى ضلع
** يسمى المضلع بعدد أضلاعه

أمثلة :



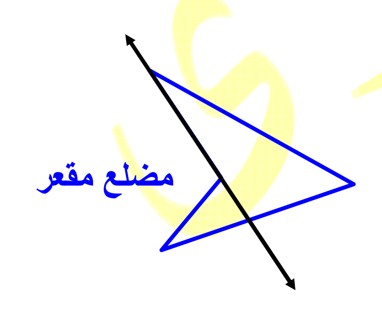




المضلع المحدب :
فى المضلع المحدب أى مستقيم يتعين برأسين متتالين
و تكون بقية رؤوس المضلع واقعة فى أحد جانبى هذا المستقيم
ويلاحظ أن أى زاوية من زوايا ه قياسها أقل من ١٨٠ ˚

مضلع محدب

المضلع المقعر :
فى المضلع المقعر توجد مستقيمات تتعين برأسين متتالين
و تقع بقية رؤوس المضلع على جانبى هذه المستقيمات
ويلاحظ أنه توجد زاوية واحدة على الأقل من زوايا ه قياسها
أكبر من ١٨٠ ˚ (زاوية منعكسة)



** إذا ذكر أى مضلع يقصد بذلك المضلع المحدب ما لم يذكر أنه مقعر

ملاحظات :
** كل قطعة مستقيمة منها تسمى ضلع مثل $\overline{\text{م ب}}$
** كل نقطة ناتجة عن تلاقى ضلعين متجاورين من أضلاع المضلع تسمى رأس مثل و
** عدد أضلاع أى مضلع = عدد رؤوسه = عدد زواياه
** كل زاوية ناتجة من إتحاد ضلعين من أضلاع المضلع تسمى زاوية داخلة مثل ∠ ء أى ∠ و ء حـ
** إذا مد أحد أضلاع مضلع من إحدى جهتيه إلى ما لا نهاية تنتج زاوية تسمى زاوية خارجة مثل ∠ ب حـ هـ
** محيط المضلع هو = مجموع أطوال المضلع
** القطعة المستقيمة الواصلة بين رأسين غير متتاليين فى المضلع تسمى قطر المضلع مثل $\overline{\text{و ب}}$

عدد أقطار مضلع عدد أضلاعه ن = $\frac{\text{ن (ن} - ٣)}{٢}$

تدريب : أكمل الجدول الآتى :

إسم المضلع	عدد الأضلاع	عدد الرؤوس	عدد الزوايا	عدد الأقطار
الثلاثى " مثلث "	٣	٣	٣	صفر
الرباعى	٤	٤	٤	٢
الخماسى	٥			
السداسى	٦			
السباعى	٧			
الثمانى	٨			
التساعى	٩			
العشارى	١٠			
النونى	ن			

مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمضلع :

نعلم أن : مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

فإذا رسمت الأقطار الخارجة من أى رأس من رؤوس المضلع ينقسم المضلع لعدد من المثلثات

فيكون : عدد المثلثات التى ينقسم إليها مضلع عدد أضلاعه ن = ن − ٢

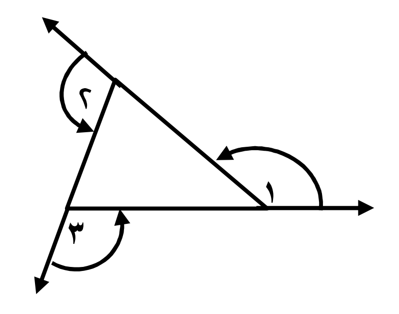
نستنتج مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمضلع

فيكون : مجموع قياسات الزوايا الداخلة لمضلع محدب عدد أضلاعه ن = (ن − ٢) × ١٨٠°

تدريب : أكمل الجدول الآتى :

إسم المضلع	عدد الأضلاع	عدد المثلثات الناتجة	مجموع قياسات الزوايا الداخلة
الرباعى	٤	٢	٢× ١٨٠° = ٣٦٠°
الخماسى	٥		
السداسى	٦		
السباعى	٧		
الثمانى	٨		
التساعى	٩		
العشارى	١٠		
النونى	ن		

ملاحظة :

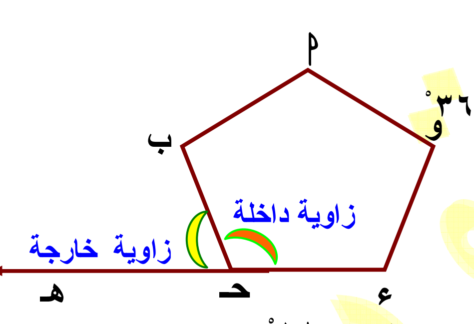


إذا مدت المستقيمات الحاملة لأضلاع مضلع من جهة واحدة و مأخوذة فى ترتيب دورى واحد ينتج :

عدد أضلاع المضلع = عـــدد رؤوسه

= عدد زواياه الداخلة

= عدد زواياه الخارجة



* عند أى رأس من رؤوس المضلع يكون :

مجموع قياسى الزاويتين الداخلة والخارجة = ١٨٠°

* مجموع قياسات الزوايا الخارجة لمضلع محدب عدد أضلاعه ن = ٣٦٠°

∵ مجموع قياسى الزاويتين الداخلة والخارجة للمضلع عند أى رأس = ١٨٠°

∴ مجموع قياسات الزوايا الداخلة والخارجة للمضلع عند أى رأس = ن × ١٨٠°

، ∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة لمضلع عدد أضلاعه ن = (ن – ٢) × ١٨٠°

∴ مجموع قياسات الزوايا الخارجة = ن × ١٨٠° – (ن – ٢) × ١٨٠°

= ١٨٠ ن – ١٨٠ ن + ٣٦٠° = ٣٦٠°

تدريب : أوجد مجموع قياسات الزوايا الخارجة للمضلع السداسى

الحل

∵ مجموع قياسى الزاويتين الداخلة والخارجة للمضلع عند أى رأس = ١٨٠°

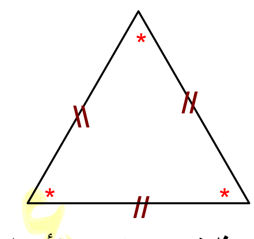
∴ مجموع قياسات الزوايا الداخلة والخارجة للمضلع السداسى = ٠٠٠٠

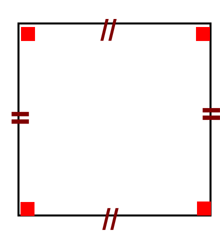
، ∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمضلع السداسى = ٠٠٠٠

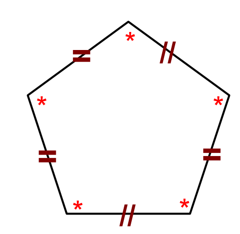
∴ مجموع قياسات الزوايا الخارجة للمضلع السداسى = ٠٠٠٠

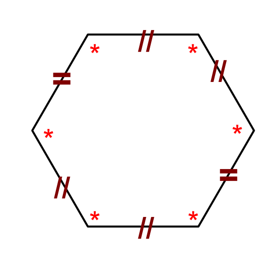
المضلع المنتظم : هو المضلع الذى تتساوى فيه أطوال أضلاعه وتتساوى قياسات زواياه

أمثلة :


مثلث متساوى الأضلاع


مربــــع


خماسى منتظم



سداسى منتظم

فى المضلع المنتظم يكون :

* قياس كل زاوية من زوايا مضلع منتظم مضلع عدد أضلاعه ن = $\frac{(\text{ن} - ٢) \times ١٨٠^\circ}{\text{ن}}$
* محيط مضلع منتظم مضلع عدد أضلاعه ن = طول الضلع × ن
* عدد أضلاع المضلع المنتظم = $\frac{٣٦٠^\circ}{١٨٠^\circ - \text{س}^\circ}$ حيث س° قياس إحدى زواياه الداخلة

تدريب (١) : أوجد قياس كل زاوية من الزوايا الداخلة لمضلع خماسى منتظم

قياس كل زاوية من الزوايا الداخلة لمضلع خماسى منتظم = $\frac{(٥ - .....) \times .....^\circ}{....}$

= ....°

تدريب (٢) : مضلع منتظم قياس إحدى زواياه الداخلة ١٤٠° أوجد عدد أضلاعه

$\frac{(\text{ن} - ٢) \times ١٨٠^\circ}{\text{ن}} = ١٤٠^\circ$ ∴ (ن − ٢) × ١٨٠° = ١٤٠ ن

∴ .... = ١٤٠ ن ∴ ..... ـ = ١٤٠ ن = ...

∴ ..... ن = ... ∴ ن = ...

∴ عدد أضلاع المضلع = ... ضلع

حل آخـــــــر

عدد أضلاع المضلع = $\frac{٣٦٠^\circ}{١٨٠^\circ - ١٤٠^\circ}$ = ... ضلع

تدريب (٣) : أكمل الجدول الآتى :

عدد أضلاع مضلع منتظم	٣	٤			٧	٨	١٠	
قياس إحدى زواياه الداخلة			١٢٠°	١٣٥°				١٦٠°

تمارين (٢)

١ ـ أكمل ما يأتى :

(١) يكون المضلع منتظماً إذا كان ٠٠٠٠٠٠ ، ٠٠٠٠٠٠

(٢) عدد المثلثات التى ينقسم إليها أى مضلع يساوى ٠٠٠٠٠

(٣) مجموع قياسات زوايا المضلع الخماسى المنتظم = ٠٠٠٠٠

(٤) قياس كل زاوية من زوايا المضلع السداسى المنتظم = ٠٠٠٠٠

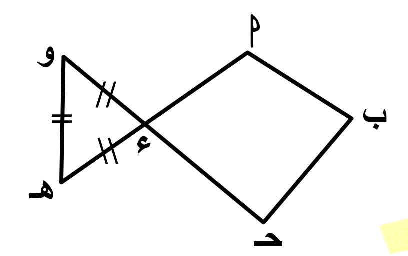
(٥) محيط مضلع منتظم طول ضلعه ٥ سم = ٠٠٠٠٠

(٦) طول ضلع مضلع رباعى منتظم محيطه ١٦ سم = ٠٠٠٠٠

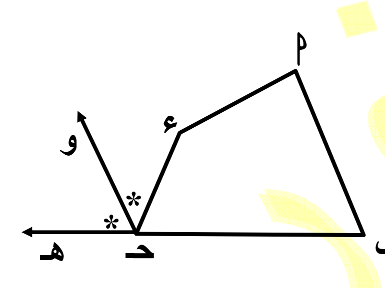
(٧) المضلع الذى ليس له أقطار هو ٠٠٠٠٠

(٨) عدد أقطار المضلع الرباعى = ٠٠٠٠٠

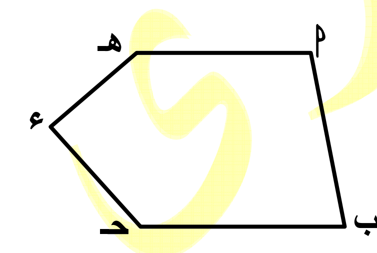
(٩) عدد أضلاع مضلع منتظم قياس إحدى زواياه ١٢٠° = ٠٠٠٠٠



٢ ـ فى الشكل المقابل : ق(∠ ٲ) = ٨٠° ، ق(∠ ء) = ١٢٠°
، هـ ∈ ٲب ، ق(∠ هـ ب حـ) = ١٣٠°
أوجد ق(∠ ء حـ ب)

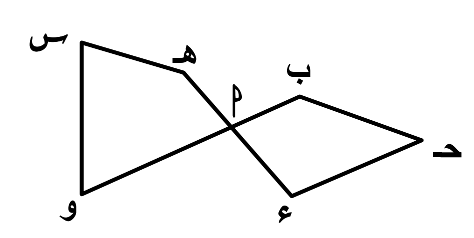


٣ ـ فى الشكل المقابل: ٲهـ ∩ حـو = { ء } ،
ق(∠ ٲ) = ١٢٥° ، ق(∠ حـ) = ١٠٠°
أوجد ق(∠ حـ ب ٲ)



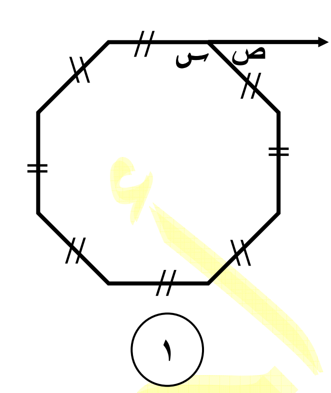
٤ ـ فى الشكل المقابل : ق(∠ ٲ) = ١٢٠°
، ق(∠ ب) = ٦٠° ، هـ ∈ حـب
، حـو ينصف ∠ ء حـ هـ أوجد ق(∠ و حـ هـ)
ثم أثبت أن حـو // ٲب

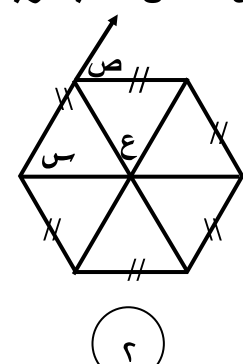
٥ ـ فى الشكل المقابل : ٲ ب حـ ء هـ شكل خماسى فيه ب حـ // ٲ هـ
ق(∠ حـ) = ١٢٠° ، ق(∠ ء) = ٨٥°
أوجد ق(∠ هـ)

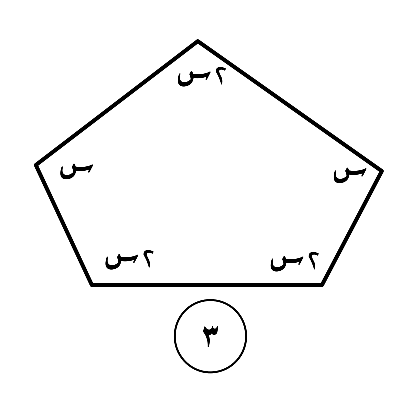


٦ ـ فى الشكل المقابل : ب و ∩ هـ ء = { ٲ }
، ق(∠ حـ) = ٤٥° ، ق(∠ ب) = ١٢٠°
، ق(∠ ء) = ١٠٥° ، ق(∠ هـ) = ١٣٠°
، ق(∠ س) = ٨٠° أوجد ق(∠ و)

٧ ـ فى الأشكال الآتية أوجد قياسات الزوايا : س ، ص ، بالدرجات







٨ ـ إذا كانت النسبة بين قياسات الزوايا الداخلة لمضلع خماسى هى ٢ : ٢ : ٣ : ٤ : ٤
أوجد أصغر زوايا هذا المضلع

٩ ـ هل للمضلع المنتظم زاوية داخلة قياسها ١٠٠ ° ؟ ولماذا ؟

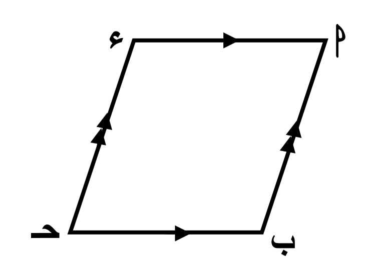
١٠ ـ إذا كان قياس الزاوية الخارجة لمضلع منتظم = ٣٠ ° ، و ما عدد أضلاع هذا المضلع ؟
، و ما مجموع قياسات زواياه الداخلة ؟

١١ ـ مضلع له تسعة أضلاع و مجموع قياسات ثمان من زواياه هو ١١٤٠ ° أوجد قياس
الزاوية التاسعة ، هل يمكن أن يكون هذا المضلع منتظماً ؟ و لماذا ؟

١٢ ـ مضلع عدد أضلاعه ١٥ ضلع فإذا كان مجموع قياسات خمسة من زواياه الخارجة يساوى
٢٠٠ ° أوجد مجموع قياسات الزوايا العشرة الداخلة غير المجاورة للزوايا الخمسة الخارجة

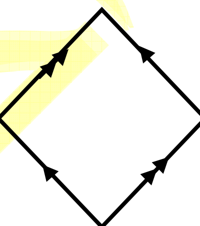
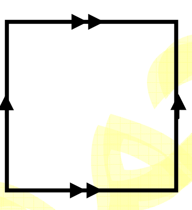
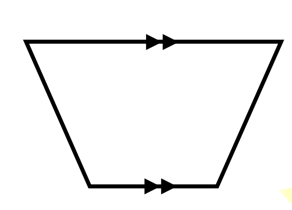
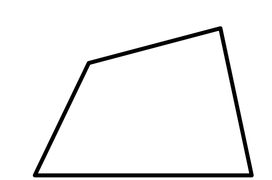
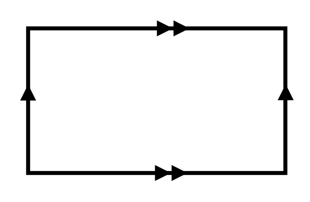
متوازى الأضلاع

متوازى الأضلاع :

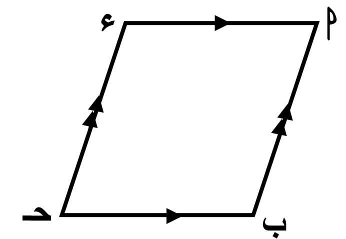


هو شكل رباعى فيه كل ضلعان متقابلان متوازيان
فى الشكل المقابل : إذا كان : ﻫ ب // ء حـ ، ﻫ ء // ب حـ
فإن : الشكل ﻫ ب حـ ء يكون متوازى أضلاع
وبالعكس إذا كان : الشكل ﻫ ب حـ ء يكون متوازى أضلاع ،
فإن : ﻫ ب // ء حـ ، ﻫ ء // ب حـ

تدريب : فى الأشكال المقابلة بين أى منها متوازى أضلاع

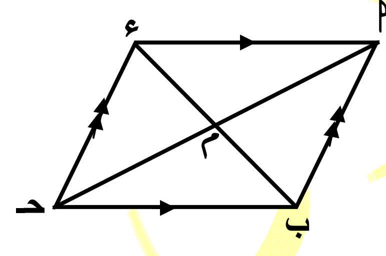
ملاحظة :



الشكل الرباعى الذى فيه ضلعان فقط متوازيان
يسمى شبه منحرف



نشاط :



إرسم متوازى الأضلاع ﻫ ب حـ ء
قس أطوال أضلاعه : ﻫ ب ، ء حـ ؛ ﻫ ء ، ب حـ
ماذا تلاحظ ؟

قس قياسات زواياه : ∠ ﻫ ، ∠ ب ، ∠ حـ ، ∠ ء
ماذا تلاحظ ؟

و إذا وصلنا قطراه ﻫ حـ ، ب ء بحيث يتقاطعان فى م
قس أطوال : ﻫ م ، ب م ؛ حـ م ، ء م
ماذا تلاحظ ؟

خواص متوازى الأضلاع : (١) كل ضلعين متقابلين متساويان فى الطول
(٢) كل زاويتين متقابلتين متساويتان فى القياس
(٣) كل زاويتين متتاليتين متكاملتان
(٤) القطران ينصف كل منهما الآخر

ملاحظة :

يكون الشكل الرباعى متوازى أضلاع إذا توافر فيه أحد الشروط الآتية :

(١) كل ضلعين متقابلين متوازيان
(٢) كل ضلعين متقابلين متساويان فى الطول
(٣) كل زاويتين متقابلتين متساويتان فى القياس
(٤) كل زاويتين متتاليتين متكاملتان
(٥) القطران ينصف كل منهما الآخر
(٦) ضلعان متقابلان متوازيين ومتساويين فى الطول

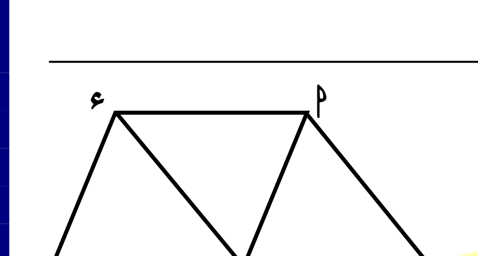
تدريبات :

(١) فى الشكل المقابل : ٲ ب حـ ء متوازى أضلاع

أكمل ما يأتى : $\overline{ٲب}$ // ٠٠٠٠

حـ ء = ٠٠٠٠ سم

محيط متوازى الأضلاع ٲ ب حـ ء = ٠٠٠٠ سم

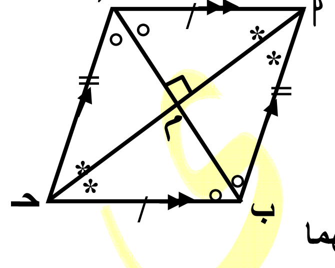


الحل

---

(٢) فى الشكل المقابل : ٲ ب حـ ء متوازى أضلاع ، هـ ∈ $\overleftarrow{حـب}$

بحيث حـ ب = ب هـ أثبت أن : ٲ هـ ب ء متوازى أضلاع



الحل

المعطيات :

المطلوب :

البرهـان : ∵ ٲ ب حـ ء متوازى أضلاع ∴ ٲ ء = ٠٠٠٠ ، $\overline{ٲء}$ // ٠٠٠٠

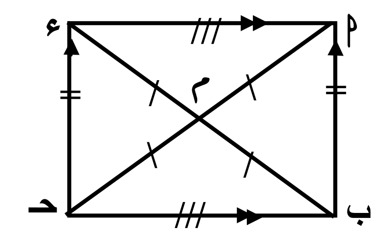
، ∵ حـ ب = ب هـ ∴ ب هـ = ٠٠٠٠ ، $\overline{بهـ}$ // ٠٠٠٠

∴ ٲ هـ ب ء متوازى أضلاع

حالات خاصة من متوازى الأضلاع :

(١) **المعين** : هو متوازى أضلاع فيه ضلعان متجاوران متساويان فى الطول

أ، هو متوازى أضلاع قطراه متعامدان



خواص المعين : له جميع خواص متوازى الأضلاع السابق ذكرها

بالإضافة إلى الخواص الآتية :

* أضلاعه متساوية فى الطول
* قطراه متعامدان و كل منهما قطر ينصف زاويتى الرأس الواصل بينهما

---

(٢) **المستطيل** : هو متوازى أضلاع إحدى زواياه قائمة

أ، هو متوازى أضلاع قطراه متساويان فى الطول

خواص المستطيل : له جميع خواص متوازى الأضلاع السابق ذكرها

بالإضافة إلى الخواص الآتية :

* زواياه متساوية فى القياس وقياس كل منها = ٩٠°
* قطراه متساويان فى الطول

ء ٲ م حـ ب

(٣) المربع : هو متوازى أضلاع إحدى زواياه قائمة وفيه ضلعان متجاوران متساويان فى الطول

أ، هو مستطيل فيه ضلعان متجاوران متساويان فى الطول

أ، هو معين إحدى زواياه قائمة

خواص المربع : له جميع خواص متوازى الأضلاع السابق ذكرها بالإضافة إلى الخواص الآتية :

* أضلاعه متساوية فى الطول
* زواياه متساوية فى القياس وقياس كل منها = ٩٠°
* قطراه متساويان فى الطول و متعامدان و كل من قطراه ينصف زاويتى الرأس الواصل بينهما

ملاحظة :

لإثبات أن متوازى الأضلاع معين أو مستطيل أو مربع نثبت أحد خواص الشكل المطلوب إثباته

تدريبات :

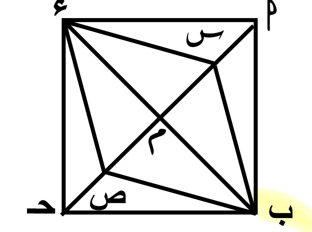
(١) أكمل الجدول التالى بوضع علامة ✓ أمام كل خاصية للشكل :

الخواص	متوازى الأضلاع	المستطيل	المعين	المربع
كل ضلعين متقابلين متساويان فى الطول	✓	✓	✓	✓
كل ضلعين متقابلين متوازيان				
كل زاويتين متقابلتين متساويتان فى القياس				
القطران ينصف كل منهما الآخر				
القطران متساويان فى الطول				
القطران متعامدان				
الأضلاع متساوية فى الطول				
القطران ينصفان زاويتى الرأس المرسومة بينهما	×	×	✓	✓
الزوايا قائمة				

(٢) فى الشكل المقابل : ٮ ب حـ ء مربع تقاطع قطراه فى م

، س ، ص ∈ ٮحـ بحيث ٮ س = حـ ص

أثبت أن س ب ص ء معين



الحل

المعطيات :

المطلوب :

البرهـان : ∵ ٮ ب حـ ء مربع ∴ ٮ م = ٠٠٠٠

، ب م = ٠٠٠٠٠ (١)

، ∵ ٮ س = ٠٠٠٠٠ ∴ س م = ٠٠٠٠٠ (٢)

∴ من (١) ، (٢) ينتج أن : ٮ ب حـ ء ٠٠٠٠

، ∵ ٠٠٠٠ ⊥ ٠٠٠٠ ∴ ٮ ب حـ ء ٠٠٠٠

تمارين (٣)

١ ــ أكمل ما يأتى :

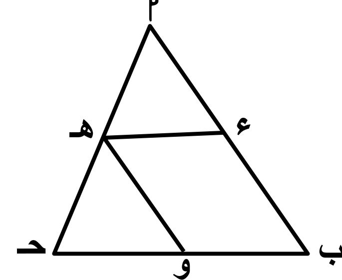
(١) قطرا المعين ٠٠٠٠ ، ٠٠٠٠٠

(٢) إذا كانت الزوايا الداخلة فى الشكل الرباعى متساوية فى القياس فإنه يكون ٠٠٠٠ أ، ٠٠٠٠

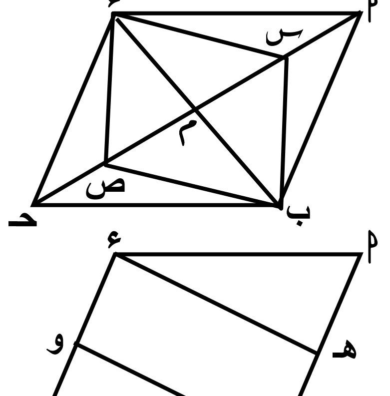
(٣) المربع هو ٠٠٠٠ أضلاعه ٠٠٠٠

(٤) فى متوازى الأضلاع إذا تساوى القطران فى الطول فإنه يكون ٠٠٠٠

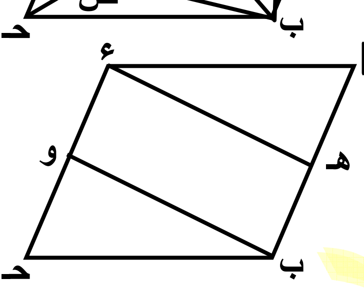
(٥) المربع هو ٠٠٠٠ إحدى زواياه قائمة
(٦) قطرا المستطيل ٠٠٠٠ ، ٠٠٠٠٠٠٠
(٧) فى المربع القطران ٠٠٠٠ ، ٠٠٠٠ ، ٠٠٠٠ ، ٠٠٠٠
(٨) متوازى الأضلاع الذى قطراه متعامدان ومتساويان فى الطول يسمى
(٩) قياس الزاوية المحصورة بين ضلع المربع وقطره = ٠٠٠٠
(١٠) فى متوازى الأضلاع م ب حـ ء إذا كان ق(∠ م) = ٧٠° فإن ق(∠ حـ) = ٠٠٠٠°
(١١) فى متوازى الأضلاع م ب حـ ء إذا كان ق(∠ م) = ٧٠° فإن ق(∠ ب) = ٠٠٠٠°
(١٢) فى المعين م ب حـ ء إذا كان ق(∠ م حـ ب) = ٤٠° فإن ق(∠ ء) = ٠٠٠٠°
(١٣) القطران متساويان فى الطول فى ٠٠٠٠ ومتعامدان وغير متساويين فى الطول ٠٠٠٠
ومتساويين فى الطول ومتعامدين فى ٠٠٠٠



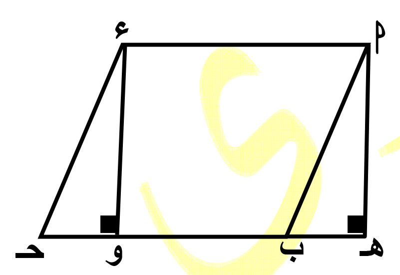
٢ – فى الشكل المقابل : Δ م ب حـ فيه ب حـ = ٦ سم ، و منتصف ب حـ
، ء ∈ م ب ، هـ ∈ م حـ بحيث ء هـ // ب حـ
، ء هـ = ٣ سم أثبت أن ء هـ و ب متوازى أضلاع



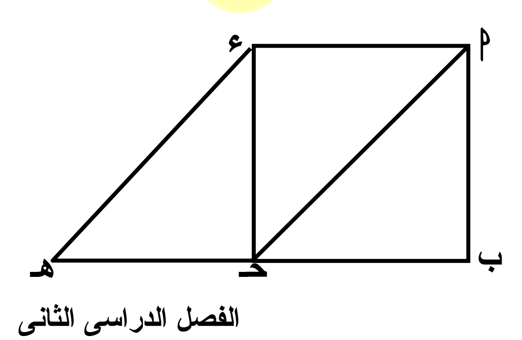
٣ – فى الشكل المقابل : م ب حـ ء متوازى أضلاع تقاطع قطراه
فى م ، س ، ص ∈ م حـ بحيث م س = حـ ص
أثبت أن : س ب ص ء متوازى أضلاع



٤ – فى الشكل المقابل : م ب حـ ء متوازى أضلاع ،
هـ منتصف م ب ، و منتصف حـ ء
أثبت أن : ء هـ ب و متوازى أضلاع



٥ – فى الشكل المقابل : م ب حـ ء متوازى أضلاع ،
م هـ ⊥ حـ ب ، ء و ⊥ حـ ب ،
هـ ب = حـ و أثبت أن : م هـ و ء مستطيل



٦ – فى الشكل المقابل : م حـ هـ ء متوازى أضلاع ،
هـ ∈ ب حـ بحيث ب حـ = حـ هـ ،
ء حـ ⊥ ب حـ
أثبت أن : م ب حـ ء مربع

المثلث

نظرية (١) : مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة يساوى ١٨٠ ˚

المعطيات : ﻫ ب حـ مثلث

المطلوب : إثبات أن :

ق (∠ ب ﻫ حـ) + ق (∠ ب) + ق (∠ حـ) = ١٨٠ ˚

العمـــل : من نقطة ﻫ نرسم س ص ↔ // ب حـ

البرهان : ∵ س ص ↔ // ب حـ

∴ ق (∠ ب ﻫ س) = ق (∠ ب) بالتبادل (١)

، ق (∠ ب ﻫ ص) = ق (∠ حـ) بالتبادل (٢)

بجمع (١) ، (٢) ينتج

ق (∠ ب ﻫ س) + ق (∠ ب ﻫ ص) = ق (∠ ب) + ق (∠ حـ)

بإضافة ق (∠ ب ﻫ حـ) للطرفين ينتج

ق (∠ ب ﻫ س) + ق (∠ ب ﻫ ص) + ق (∠ ب ﻫ حـ) =

ق (∠ ب) + ق (∠ حـ) + ق (∠ ب ﻫ حـ)

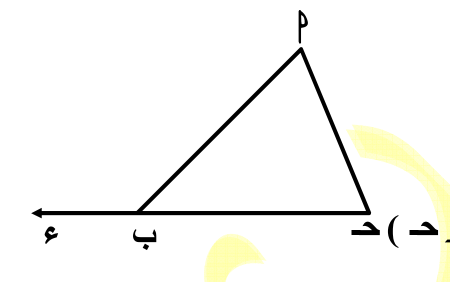
، ∵ ق (∠ ب ﻫ س) + ق (∠ ب ﻫ ص) + ق (∠ ب ﻫ حـ) = ١٨٠ ˚

∴ ق (∠ ب) + ق (∠ حـ) + ق (∠ ب ﻫ حـ) = ١٨٠ ˚ وهو المطلوب

تدريب : Δ ﻫ ب حـ فيه : ق (∠ ﻫ) = ٦٣ ˚ ، ق (∠ ب) = ٤٥ ˚ أوجد ق (∠ حـ)

الحل

ق (∠ حـ) = ١٨٠ ˚ – (٠٠٠٠ + ٠٠٠٠) = ٠٠٠٠ ˚

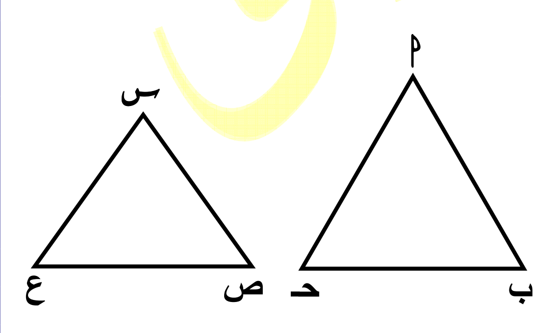


نتيجة (١) : قياس أى زاوية خارجة للمثلث يساوى مجموع قياسى الزاويتين الداخلتين عدا قياس الزاوية المجاورة لها

فى الشكل المقابل : إذا كان : ﻫ ب حـ مثلث ، ء ∈ حـ ب ←

فإن : ق (∠ ﻫ ب ء) = ق (∠ ﻫ) + ق (∠ حـ)

نتيجة (٢) : إذا ساوى قياسا زاويتين فى مثلث قياسا زاويتين فى مثلث آخر فإن قياس الزاوية الثالثة فى المثلث الأول قياس الزاوية الثالثة فى المثلث الآخر



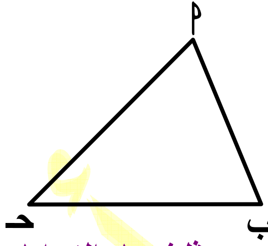
فى الشكل المقابل : إذا كان فى Δ ﻫ ب حـ ، Δ س ص ع

ق (∠ ﻫ) = ق (∠ س)

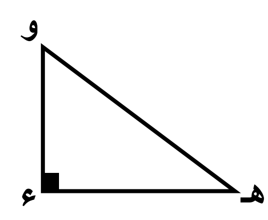
، ق (∠ ب) = ق (∠ ص)

فإن : ق (∠ حـ) = ق (∠ ع)

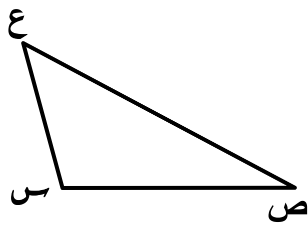
نتيجة (٣) : فى أى مثلث توجد زاويتان حادتان على الأقل



مثلث حاد الزوايا
ق (∠ م) حادة
ق (∠ ب) حادة
ق (∠ حـ) حادة



مثلث قائم الزاوية
ق (∠ هـ) حادة
ق (∠ و) حادة
ق (∠ ء) قائمة



مثلث منفرج الزاوية
ق (∠ ص) حادة
ق (∠ ع) حادة
ق (∠ س) منفرجة

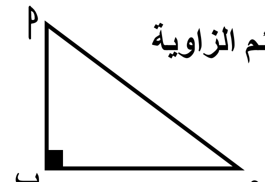
ملاحظات :

** إذا كانت إحدى زوايا المثلث قائمة فإن مجموع قياسى الزاويتين الأخريين يساوى ٩٠ ْ
" أى أن كل منهما حادة "

** إذا كانت إحدى زوايا المثلث منفرجة فإن مجموع قياسى الزاويتين الأخريين اقل من ٩٠ ْ
" أى أن كل منهما حادة "

** إذا لم تكن إحدى زوايا المثلث قائمة أو منفرجة كانت زواياه الثلاثة حادة

نتيجة (٤) : إذا ساوى قياس زاوية فى مثلث مجموع قياسى الزاويتين الأخريين كان المثلث قائم الزاوية



فى الشكل المقابل : إذا كان فى Δ م ب حـ

ق (∠ ب) = ق (∠ م) + ق (∠ حـ) فإن : ق (∠ ب) = ٩٠ ْ

ملاحظة : إذا كان : ق (∠ ب) > ق (∠ م) + ق (∠ حـ)

فإن : ق (∠ ب) > ٩٠ ْ　　　أى أن : Δ م ب حـ منفرج الزاوية فى ب

تدريبات :

(١) Δ م ب حـ فيه : ق (∠ ب) = ٤٥ ْ ، ق (∠ ب) = ق (∠ حـ) أوجد ق (∠ م)

الحل

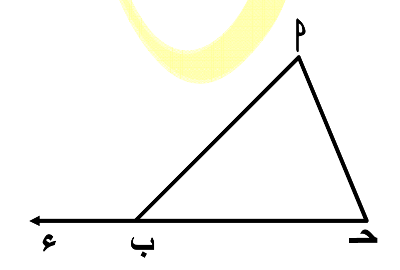
∵ ق (∠ ب) = ٠٠٠٠　　　، ق (∠ ب) = ٤٥ ْ　　　∴ ق (٠٠٠٠) = ٤٥ ْ

∴ ق (∠ م) =　　٠٠٠٠　　　= ٠٠٠٠٠ ْ

---

(٢) فى الشكل المقابل : ق (∠ م) = ٤٣ ْ

، ق (∠ حـ) = ٥٣ ْ　أوجد : ق (∠ م ب ء)

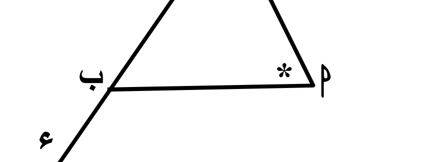


الحل

∵ ∠ م ب ء　٠٠٠٠　Δ م ب حـ

∴ ق (∠ م ب ء) =　　٠٠٠٠　　　= ٠٠٠٠ ْ

(٣) فى الشكل المقابل : ق (∠ ٲ) = ق (∠ حـ)
، ق (∠ ٲ ب ء) = ١٣٠ ° أوجد : ق (∠ حـ)



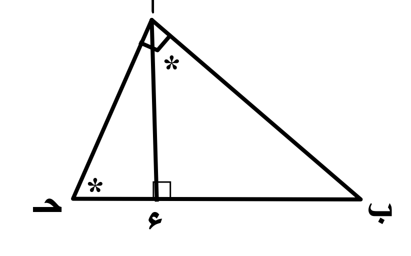


الحل

∵ ∠ ٲ ب ء ٠٠٠٠ Δ ∠ ٲ ب حـ
∴ ق (∠ ٲ ب ء) = ٠٠٠٠
، ∵ ق (∠ ٲ) = ق (∠ حـ) ∴ ق (∠ حـ) = ٠٠٠٠

---

(٤) فى الشكل المقابل : Δ ٲ ب حـ قائم الزاوية فى ٲ
، ٲ ء ⊥ ب حـ ، ق (∠ ب ٲ ء) = ق (∠ ٲ حـ ء)
برهن أن : ق (∠ حـ ٲ ء) = ق (∠ ب)



الحل

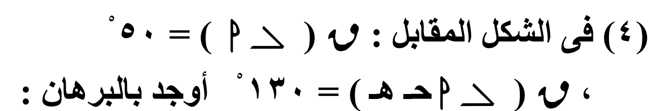
المعطيات :
المطلوب :
البرهـان : ∵ Δ ٲ ب ء ، Δ حـ ٲ ء فيهما :
ق (∠ ب ٲ ء) = ٠٠٠٠ ، ق (∠ ٲ ء حـ) = ٠٠٠٠
∴ ق (∠ حـ ٲ ء) = ق (∠ ب)

تمارين (٤)

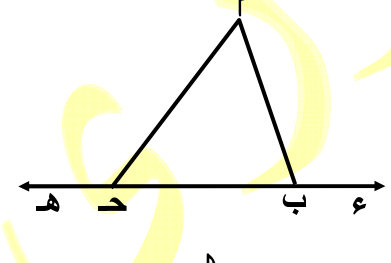
(١) Δ ٲ ب حـ فيه : ق (∠ ب) = ٤٠ ° ، ق (∠ حـ) = ٦٠ ° أوجد ق (∠ ٲ)

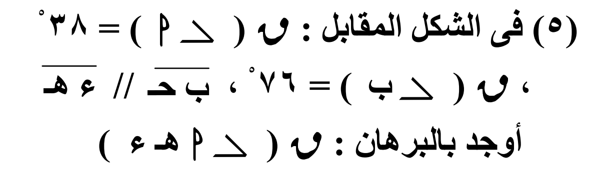
(٢) Δ ٲ ب حـ منفرج الزاوية فيه قياسا زاويتين متساويين فإذا كان : ق (∠ ب) = ١١٠ °
أوجد ق (∠ ٲ)

(٣) Δ ٲ ب حـ فيه : ق (∠ ٲ) = ٥٠ ° ، ق (∠ حـ) = ق (∠ ب) أوجد ق (∠ ب)

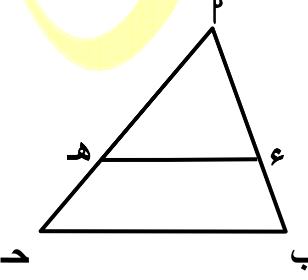


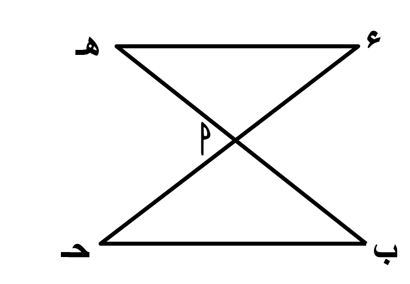
(٤) فى الشكل المقابل : ق (∠ ٲ) = ٥٠ °
، ق (∠ ٲ حـ هـ) = ١٣٠ ° أوجد بالبرهان :
ق (∠ ٲ ب حـ) ، ق (∠ ٲ ب ء)

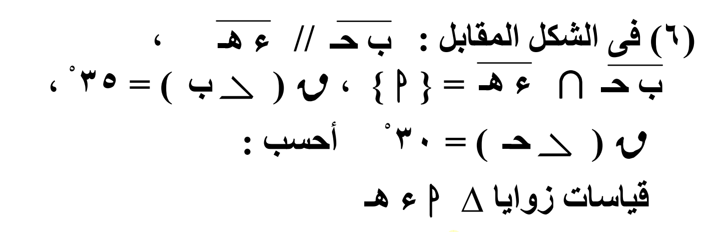




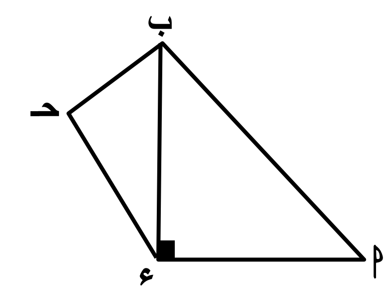
(٥) فى الشكل المقابل : ق (∠ ٲ) = ٣٨ °
، ق (∠ ب) = ٧٦ ° ، ب حـ // ء هـ
أوجد بالبرهان : ق (∠ ٲ هـ ء)



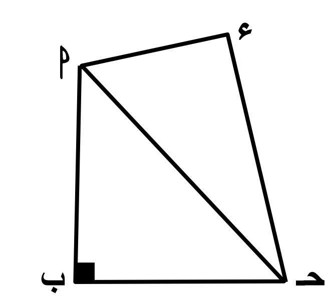




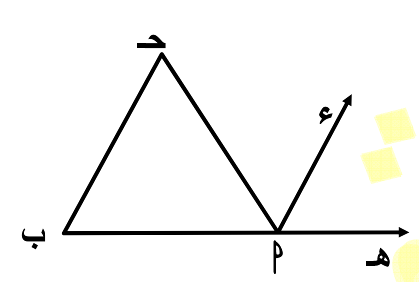
(٦) في الشكل المقابل : $\overline{ب حـ}$ // $\overline{ء هـ}$ ،
$\overline{ب حـ}$ ∩ $\overline{ء هـ}$ = { أ } ، ق (∠ ب) = ٣٥° ،
ق (∠ حـ) = ٣٠° أحسب :
قياسات زوايا Δ أ ء هـ



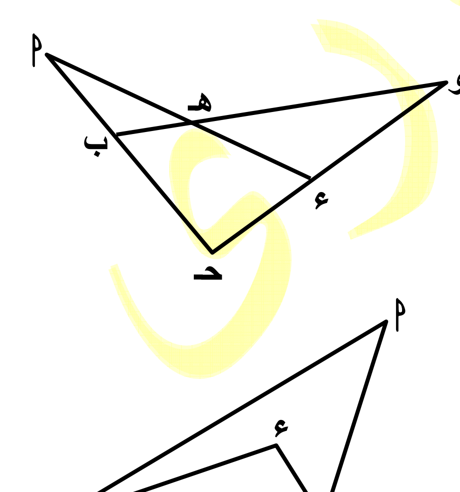
(٧) في الشكل المقابل : $\overline{أ ب}$ // $\overline{ء حـ}$ ، ق (∠ أ ء ب) = ٩٠°
، ق (∠ أ ب ء) = ٤٧° ، ق (∠ ء ب حـ) = ٢٠°
أوجد : ق (∠ أ) ، ق (∠ حـ)



(٧) في الشكل المقابل : ق (∠ أ ب حـ) = ٩٠° ،
ق (∠ ء أ حـ) = ٨٠° ، ق (∠ أ ء حـ) = ٧٠°
، ق (∠ ب أ حـ) = ٦٠° أثبت أن :
$\overline{حـ أ}$ ينصف ∠ ب حـ ء



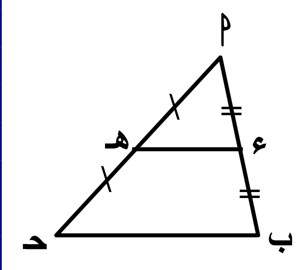
(٨) في الشكل المقابل : ق (∠ ء أ حـ) = ٧٣° ،
ق (∠ ب أ حـ) = ٥٨° ،
ق (∠ ب) = ٥٠° أثبت أن :
$\overleftarrow{ب أ}$ // $\overline{ب حـ}$



(٩) في الشكل المقابل : ب ∈ $\overline{أ حـ}$ ، ء ∈ $\overline{حـ و}$
، $\overline{أ ء}$ ∩ $\overline{ب و}$ = { هـ } ، ق (∠ و) = ٣٤°
، ق (∠ أ هـ ب) = ٢٤° ، ق (∠ حـ) = ١٠٠°
أوجد : ق (∠ أ)

(١٠) في الشكل المقابل : ق (∠ أ) = ٣٠°
، $\overleftarrow{ب ء}$ ينصف ∠ أ ب حـ
، $\overleftarrow{حـ ء}$ ينصف ∠ أ حـ ب
أوجد : ق (∠ ء)

نظرية (٢) : الشعاع المرسوم من منتصف ضلع فى مثلث موازياً أحد الضلعين الآخرين ينصف الضلع الثالث



المعطيات : Δ ٩ ب حـ فيه ء منتصف ٩ب ، ء هـ // ب حـ

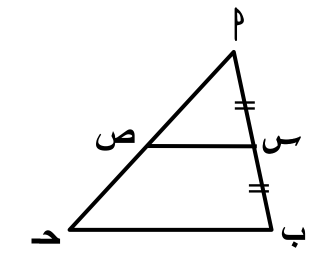
المطلوب : إثبات أن : ٩ هـ = هـ حـ

العمـــل : نرسم ٩ و // ب حـ

البرهان : ∵ ٩ و // ب حـ // ء هـ ، ٩ ب ، ٩ حـ قاطعين لهما ، ٩ ء = ء ب

∴ ٩ هـ = هـ حـ وهو المطلوب

نتيجة : القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفى ضلعين فى مثلث توازى الضلع الثالث



فى الشكل المقابل : إذا كان :

Δ ٩ ب حـ فيه ء ، هـ منتصفى ٩ب ، ٩حـ

على الترتيب فإن : ء هـ // ب حـ

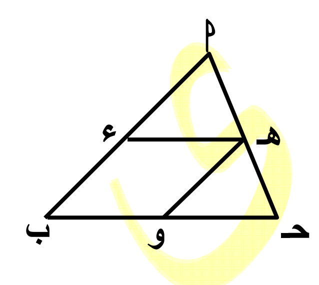
تدريبات :



(١) فى الشكل المقابل : س منتصف ٩ب ، ص ∈ ٩حـ

، س ص // ب حـ ، ٩ حـ = ٦ سم أوجد طول ٩ص

الحـــــــل



المعطيات :

المطلوب :

البرهان : ∵ Δ ٩ ب حـ فيه س منتصف ٩ب ، س ص // ب حـ

∴ ص منتصف ....

، ∵ ٩ حـ = ٦ سم

∴ ٩ ص = ... × ٦ = ... سم

---

(٢) فى الشكل المقابل : ء منتصف ٩ب ، و منتصف ب حـ

، ب حـ // ء هـ أثبت أن ء هـ و ب متوازى أضلاع



الحـــــــل

المعطيات :

المطلوب :

البرهان : ∵ ء منتصف .... ، .... // ....

∴ .... منتصف ....

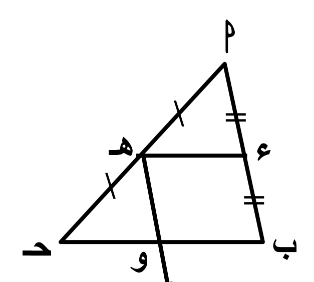
،∵ .... منتصف .... ∴ .... // ....

،∵ .... // .... ، .... // ....

∴ ء هـ و ب متوازى أضلاع

نظرية (٣) : طول القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفى ضلعين فى مثلث يساوى نصف طول الضلع الثالث

المعطيات : ء منتصف أ ب ، هـ منتصف أ حـ



المطلوب : إثبات أن : ء هـ = $\frac{1}{2}$ ب حـ

العمـــل : نرسم هـ و // أ ب و يقطع ب حـ في و

البرهان : ∵ ء منتصف أ ب ، هـ منتصف أ حـ

∴ ء هـ // ب حـ

، ∵ هـ و // أ ب ، هـ منتصف أ حـ

∴ ب و = $\frac{1}{2}$ ب حـ

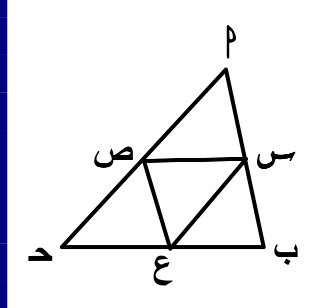
، ∵ الشكل ب ء هـ و متوازى أضلاع

∴ ء هـ = ب و = $\frac{1}{2}$ ب حـ

تدريب : فى الشكل المقابل ∆ أ ب حـ فيه أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ٦ سم

، أ ب = ٩ سم ، س ، ص ، ع منتصفات أ ب ، أ حـ

، ب حـ أوجد محيط ∆ س ص ع



الحل

المعطيات :

المطلوب :

البرهان : ∵ س منتصف ....

، ص منتصف ....

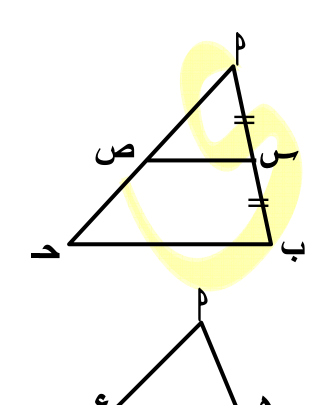
∴ س ص = ...

، بالمثل ص ع = ...

، بالمثل س ع = ...

∴ محيط ∆ س ص ع = ...

تمارين (٥)

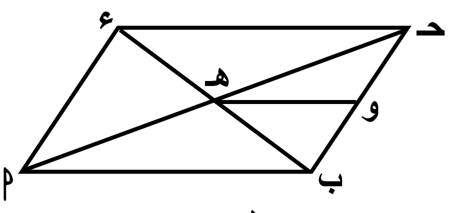


(١) فى الشكل المقابل : س منتصف أ ب ، ص ∈ أ حـ

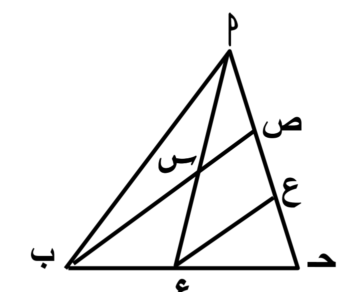
، س ص // ب حـ ، أ ص = ٦ سم أوجد طول أ حـ

(٢) فى الشكل المقابل : ء منتصف أ ب ، ء هـ // ب حـ

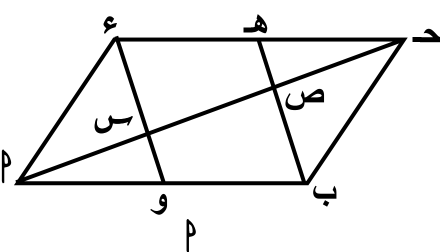
، هـ و // أ ب أثبت أن : ب و = و حـ



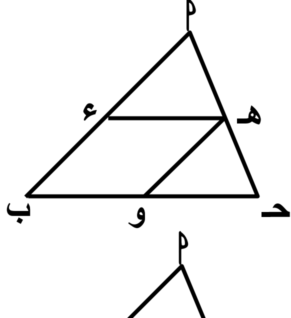
(٣) فى الشكل المقابل : ٮ ب حـ ء متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى هـ ، رسم هـ و // $\overline{\text{ٮ ب}}$
أثبت أن : حـ و = و ب



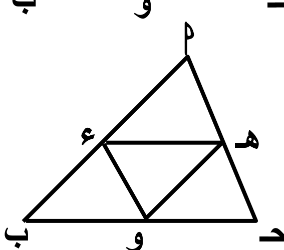
(٤) فى الشكل المقابل : ء منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ ، س منتصف $\overline{\text{ٮ ء}}$ ، ء ع // ب ص ، ٮ حـ = ٦ سم
أوجد : طول $\overline{\text{ٮ ص}}$



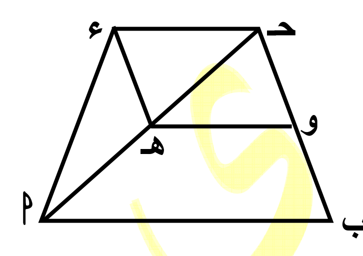
(٥) فى الشكل المقابل : ٮ ب حـ ء متوازى أضلاع ، و ، هـ منتصفى $\overline{\text{ٮ ب}}$ ، $\overline{\text{ء حـ}}$ على الترتيب
أثبت أن : و ب هـ ء متوازى أضلاع
، إذا كان : ٮ حـ = ٩ سم أوجد : طول $\overline{\text{س ص}}$



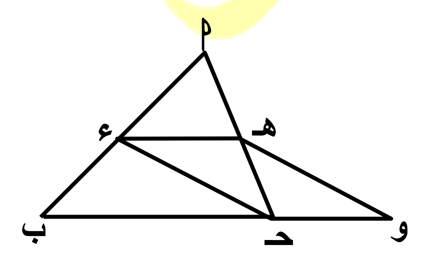
(٦) فى الشكل المقابل : Δ ٮ ب حـ فيه ٮ ب = ٮ حـ ، ء ، هـ ، و منتصفات $\overline{\text{ٮ ب}}$ ، $\overline{\text{ٮ حـ}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ على الترتيب أثبت أن : ء هـ و ب معين



(٧) فى الشكل المقابل : Δ ٮ ب حـ فيه ء ، هـ ، و منتصفات $\overline{\text{ٮ ب}}$ ، $\overline{\text{ٮ حـ}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ على الترتيب ، هـ و = ٤,٥ سم ، و ء = ٥,٥ سم ، ء هـ = ٣ سم
أوجد : محيط Δ ٮ ب حـ



(٨) فى الشكل المقابل : ٮ ب حـ ء شبه منحرف فيه $\overline{\text{ٮ ب}}$ // $\overline{\text{ء حـ}}$ ، حـ ء = $\frac{1}{2}$ ٮ ب ، و ، هـ منتصفى $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{ٮ حـ}}$ على الترتيب أثبت أن :
و حـ ء هـ متوازى أضلاع



(٩) فى الشكل المقابل : Δ ٮ ب حـ فيه ء ، هـ منتصفى $\overline{\text{ٮ ب}}$ ، $\overline{\text{ٮ حـ}}$ على الترتيب ،
و ∈ $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ بحيث حـ و = $\frac{1}{2}$ ب حـ أثبت أن :
حـ و هـ ء متوازى أضلاع

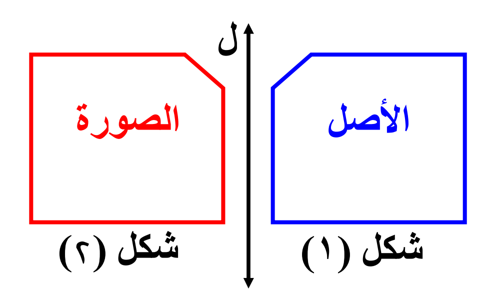
التحويلات الهندسية

التحويلة الهندسية :

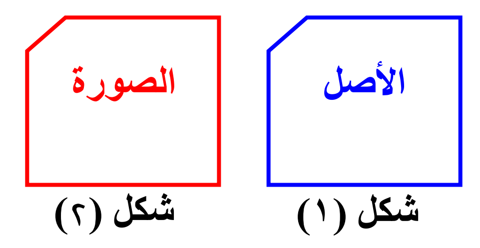
تحول كل نقطة فى المستوى م إلى نقطة م/ فى نفس المستوى

التحويلات الهندسية متعددة و من أمثلتها :

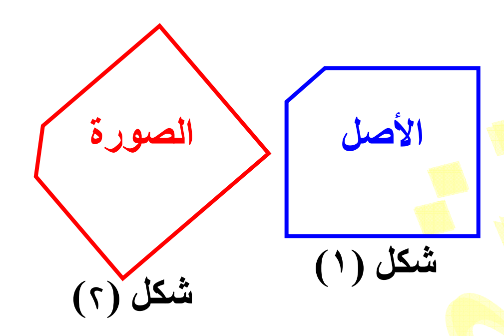
** فى الشكل المقابل : نلاحظ أن : الشكل (٢) " الصورة " هو نفس الشكل (١) " الأصل " بوضع معكوس حول المستقيم ل تسمى هذه التحويلة " إنعكاس "



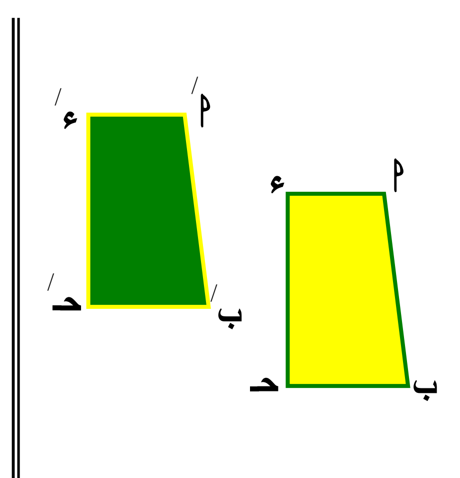
** فى الشكل المقابل: نلاحظ أن : الشكل (٢) " الصورة " هو نفس الشكل (١) " الأصل " ولكن إنتقل من مكانه إلى مكان آخر تسمى هذه التحويلة " إنتقال "

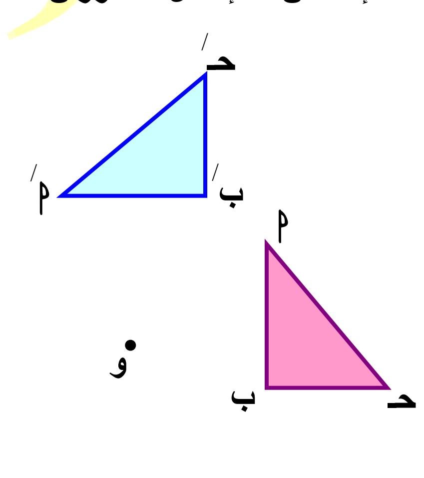


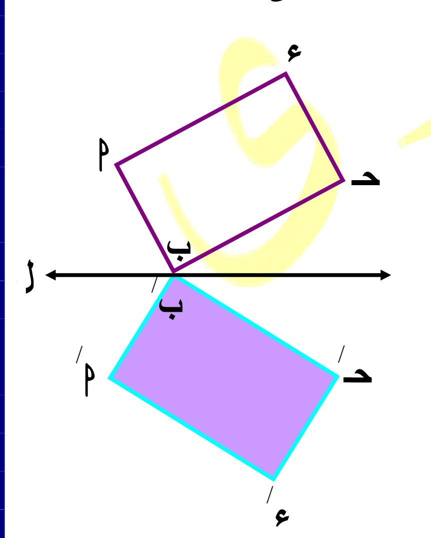
** فى الشكل المقابل: نلاحظ أن : الشكل (٢) " الصورة " هو نفس الشكل (١) " الأصل " ولكن دار حول نقطة ما تسمى هذه التحويلة " دوران "



تدريب (١) : صف نوع التحويلة الهندسية " إنعكاس – إنتقال – دوران " فى كل شكل مما يأتى :







تدريب (٢) : إرسم صورة Δ ﻡ ب حـ حسب التحويلة :

(س ، ص) ← (– س ، ص)

∵ (س ، ص) ← (– س ، ص)

∴ ﻡ (٣ ، ٤) ← ﻡ/ (– ٣ ، ٤)

، ب (١ ، ٠) ← ب/ (..... ، .....)

، حـ (٤ ، ١) ← حـ/ (..... ، .....)

صف نوع التحويلة .....

تدريب (٣) : إرسم صورة Δ ء هـ و حسب التحويلة :

(س ، ص) ← (س ، – ص)

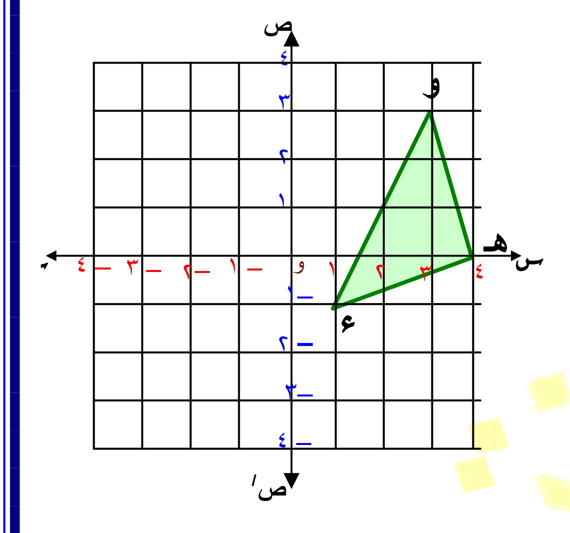
∵ (س ، ص) ← (س ، – ص)

∴ ء (١ ، – ١) ← ء/ (..... ، .....)

، هـ (٤ ، ١) ← هـ/ (..... ، .....)

، و (٣ ، ٤) ← و/ (..... ، .....)

صف نوع التحويلة .....



تدريب (٤) : إرسم صورة Δ ء هـ و حسب التحويلة :

(س ، ص) ← (س + ١ ، ص – ١)

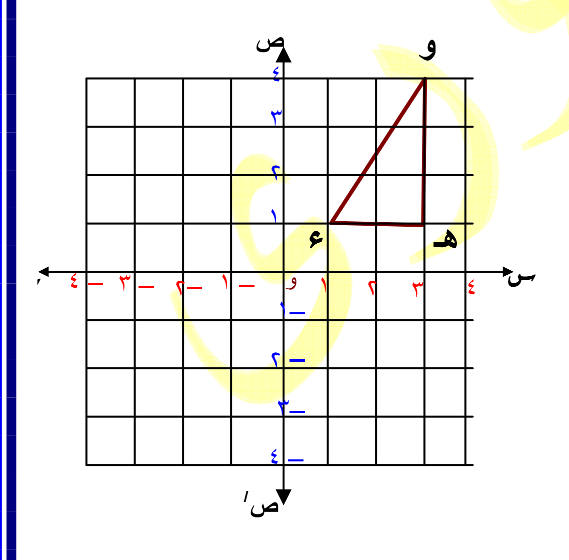
∵ (س ، ص) ← (س + ١ ، ص – ١)

∴ ء (١ ، ١) ← ء/ (٢ ، ٠)

، هـ (٣ ، ١) ← هـ/ (..... ، .....)

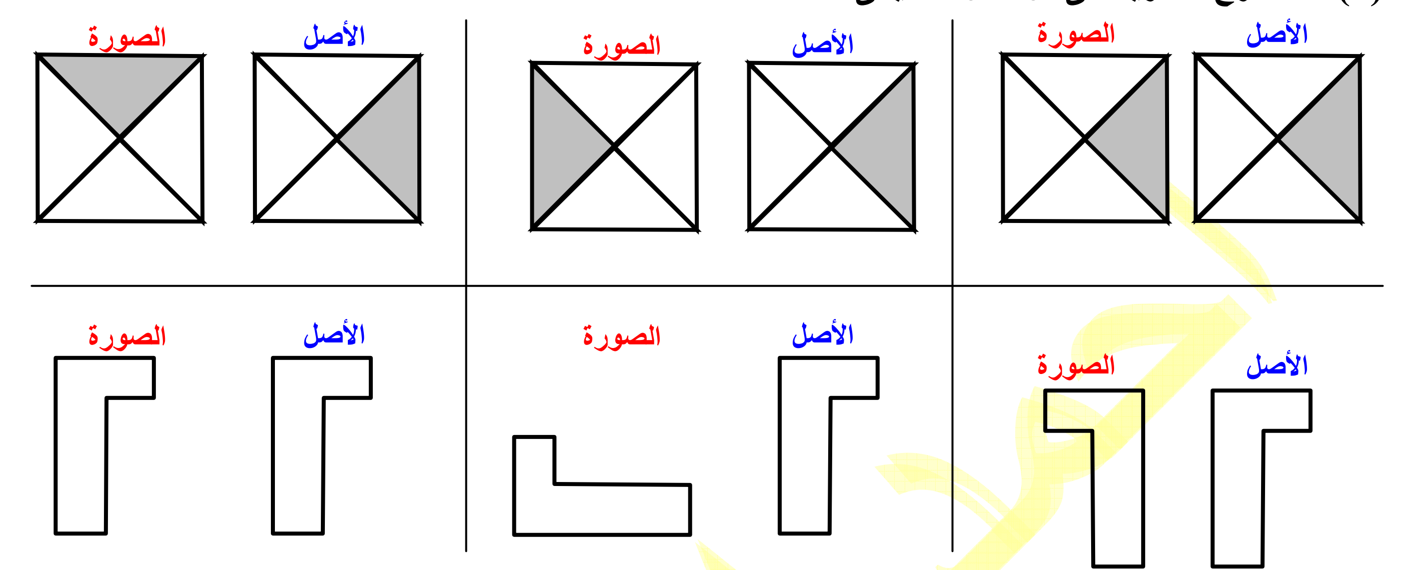
، و (٣ ، ٤) ← و/ (..... ، .....)

صف نوع التحويلة .....



تمارين (٦)

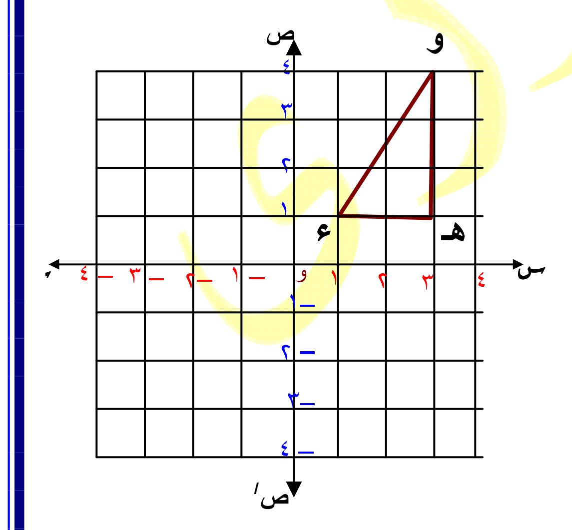
(١) صف نوع التحويلة فى كل شكل مما يأتى :



(٢) فى مستوى إحداثى متعامد إرسم Δ ٵ ب حـ الذى فيه ٵ = (١ ، ٠) ، ب = (٢ ، ٣) ، حـ = (٤ ، ٢) ثم إرسم صورته فى كل من الحالات الآتية واصفاً نوع التحويلة الهندسية فى كل حالة :

أولاً : (س ، ص) ← (ــ س ، ص) ثانياً : (س ، ص) ← (ــ س ، ص)
ثالثاً : (س ، ص) ← (س ، ص ــ ٣) رابعاً : (س ، ص) ← (س ، ــ ص)

(٣) : إرسم صورة Δ ء هـ و حسب التحويلة :
(س ، ص) ← (ــ ص ، س)
ثم أكمل ما يلى :
∵ (س ، ص) ← (ــ ص ، س)
∴ ء (١ ، ١) ← ء/ (ــ ٠٠٠٠٠ ، ٠٠٠٠٠)
، هـ (٣ ، ١) ← هـ/ (٠٠٠٠٠ ، ٠٠٠٠٠)
، و (٣ ، ٤) ← و/ (٠٠٠٠٠ ، ٠٠٠٠٠)



الإنعكاس

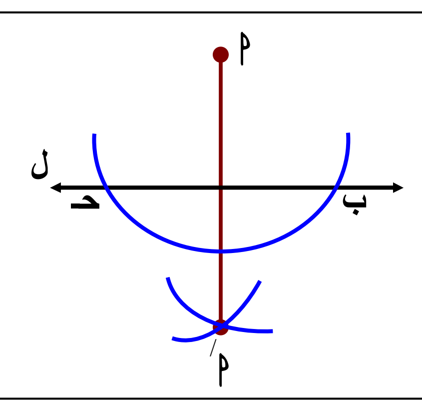
** الإنعكاس فى مستقيم

الإنعكاس فى المستقيم ل يحول كل نقطة ﻡ إلى ﻡ/ ، ب إلى ب/ بحيث :

* إذا كانت ﻡ ∌ ل فإن ل هو العمود الذى ينصف ﻡ ﻡ/

* إذا كانت ب ∈ ل فإن ب ≡ ب/

أى إذا كانت ب ∈ ل فإن صورة ب هى نفسها

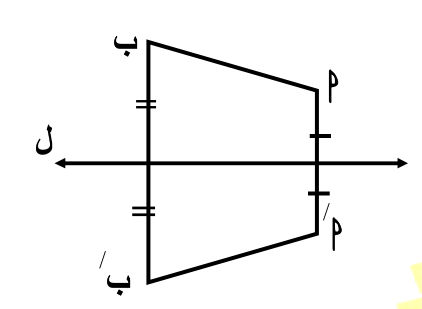


** إيجاد صورة نقطة بالإنعكاس فى مستقيم معلوم

لإيجاد ﻡ/ صورة ﻡ بالإنعكاس فى المستقيم ل نتبع الآتى :

(١) نفتح الفرجار فتحة مناسبة ونركز فى ﻡ ونرسم قوساً من دائرة يقطع المستقيم ل فى النقطتين ب ، حـ

(٢) بنفس الفتحة نركز فى ب ثم حـ ونرسم قوسين يتقاطعان فى ﻡ/ فتكون ﻡ/ هى صورة ﻡ بالإنعكاس فى المستقيم ل



** إيجاد صورة قطعة مستقيمة بالإنعكاس فى مستقيم معلوم

لإيجاد صورة ﻡ ب بالإنعكاس فى المستقيم ل نتبع التالى :

(١) نوجد ﻡ/ صورة ﻡ بالإنعكاس فى المستقيم ل كما سبق

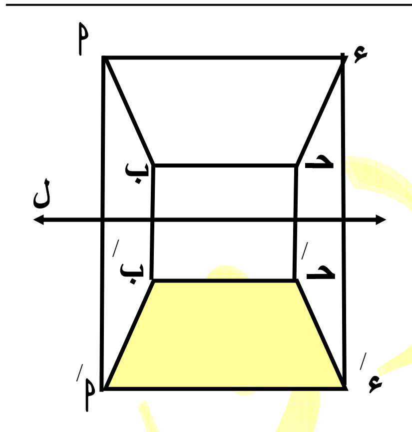
(٢) نوجد ب/ صورة ب بالإنعكاس فى المستقيم ل كما سبق

(٣) نرسم ﻡ/ ب/ فتكون هى صورة ﻡ ب بالإنعكاس فى المستقيم ل

تحقق بالقياس أن : ﻡ ب = ﻡ/ ب/

** إيجاد صورة مضلع بالإنعكاس فى مستقيم معلوم

لإيجاد صورة المضلع ﻡ ب حـ ء بالإنعكاس فى المستقيم ل نعين النقط ﻡ/ ، ب/ ، حـ/ ، ء/ صور النقط ﻡ ، ب ، حـ ، ء على الترتيب بالإنعكاس فى المستقيم ل كما سبق فيكون المضلع ﻡ/ ب/ حـ/ ء/ هو صورة المضلع ﻡ ب حـ ء بالإنعكاس فى المستقيم ل



ملاحظات :

** الصورة ﻡ/ ب/ حـ/ ء/ تطابق الأصل ﻡ ب حـ ء

** أطوال الأضلاع المتناظرة متساوية : ﻡ/ ب/ = ﻡ ب ، ب/ حـ/ = ب حـ وهكذا

** قياسات الزوايا المتناظرة متساوية : ق (∠ ﻡ/) = ق (∠ ﻡ) ، ق (∠ ب/) = ق (∠ ب) وهكذا

** الإنعكاس هو تحويلة هندسية تحول الشكل الهندسى إلى شكل هندسى آخر مطابق له

** الإنعكاس لا يحافظ على الترتيب الدورانى لرؤوس الشكل لأن رؤوس المضلع ﻡ ب حـ ء تسير فى عكس إتجاه

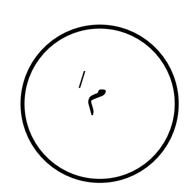
عقارب الساعة بينما رؤوس المضلع ؟/ ب/ حـ/ ء/ تسير فى إتجاه عقارب الساعة

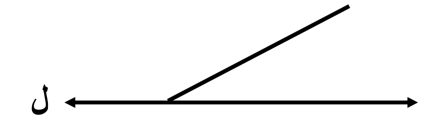
** إيجاد صورة دائرة بالإنعكاس فى مستقيم معلوم

لإيجاد صورة دائرة مركزها م بالإنعكاس فى المستقيم ل نتبع الآتى :

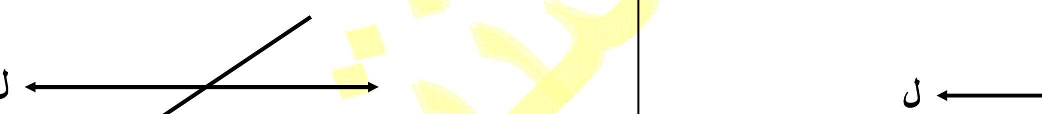
(١) نوجد م/ صورة م بالإنعكاس فى المستقيم ل كما سبق

(٢) نفتح الفرجار فتحة طولها يساوى طول نصف قطر الدائرة المعلومة ثم نركز فى م/ ونرسم دائرة تكون هى الصورة المطلوبة





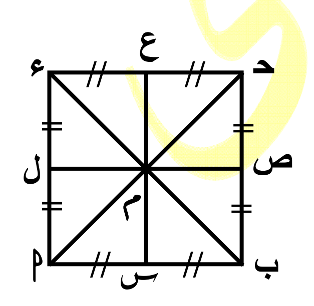
تدريب (١) : بإستخدام الأدوات الهندسية أوجد صورة $\overline{\text{؟ ب}}$ بالإنعكاس فى المستقيم ل ماذا تلاحظ ؟



تدريب (٢) : إرسم Δ ؟ ب حـ الذى فيه ؟ ب = ٣ سم ، ب حـ = ٥ سم ، ؟ حـ = ٧ سم ثم أوجد صورته بالإنعكاس فى $\overleftrightarrow{\text{؟ حـ}}$

تدريب (٣) : فى الشكل المقابل :

؟ ب حـ ء مربع ، س ، ص ، ع ، ل منتصفات أضلاعه $\overline{\text{؟ ب}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ ؛ $\overline{\text{حـ ء}}$ ، $\overline{\text{ء ؟}}$ على الترتيب ، م منتصف قطريه أكمل :



(١) صورة Δ ؟ م س بالإنعكاس فى $\overleftrightarrow{\text{س ع}}$ هى ....

، س م = ... لأن الإنعكاس يحافظ على ....

، ق ($\angle$ ؟ م س) = ... لأن الإنعكاس يحافظ على ....

(٢) المربع حـ ص م ع هو صورة المربع .... بالإنعكاس فى $\overleftrightarrow{\text{س ع}}$

(٣) المستطيل حـ ء ل ص صورة المستطيل ب ؟ ل ص بالإنعكاس فى ....

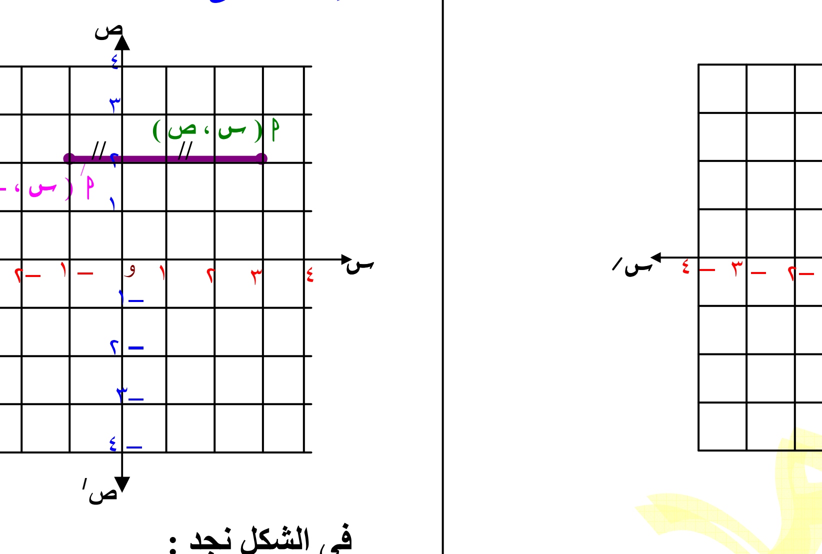
، النقطة ع صورة النقطة .... لأن الإنعكاس يحافظ على ....

أحمد الشنتورى	موجه رياضيات	إدارة كوم أمبو التعليمية
الإميل : a_shantory2007@yahoo.com	منتدى الشنتورى للرياضيات :	http://shantory.yoo7.com

الإنعكاس فى المستوى الإحداثى

الإنعكاس فى محور السينات :

الإنعكاس فى محور الصادات :



فى الشكل نجد :

أ (٣ ، ٢) ← أ/ (٣ ، –٢)

أى أن : الإنعكاس فى محور السينات
يغير إشارة المسقط الثانى " الصادى "

أ (س ، ص) ←(إنعكاس فى محور السينات)— أ/ (س ، –ص)

فى الشكل نجد :

أ (٣ ، ٢) ← أ/ (–٣ ، ٢)

أى أن : الإنعكاس فى محور الصادات
يغير إشارة المسقط الأول " السينى "

أ (س ، ص) ←(إنعكاس فى محور الصادات)— أ/ (–س ، ص)

ملاحظات :

** صورة النقطة (س ، ٠) بالإنعكاس فى محور السينات هى نفسها لأنها تقع على محور السينات
فمثلاً : صورة النقطة (٣ ، ٠) الإنعكاس فى محور السينات هى (٣ ، ٠)

** صورة النقطة (٠، ص) بالإنعكاس فى محور الصادات هى نفسها لأنها تقع على محور الصادات
فمثلاً : صورة النقطة (٠ ، ٤) الإنعكاس فى محور الصادات هى (٠ ، ٤)

** صورة النقطة (٠ ، ٠) بالإنعكاس فى محور السينات و بالإنعكاس فى محور الصادات لأنها تقع على المحورين

تدريب (١) : أكمل الجدول التالى :

النقطـــة	صورة النقطة بالإنعكاس فى محور	
	السينات	الصادات
(١ ، ٣)	(١ ، –٣)	(–١ ، ٣)
(–٢ ، ٥)		
	(٠ ، ٤)	
		(١ ، ٠)
	(–٣ ، ٣)	
(٦ ، –٤)		
		(٣ ، ٤)

تدريب (٢) : فى مستوى إحداثى متعامد إرسم المثلث ٮ ب حـ حيث ٮ = (٤ ، ٣) ، ب = (٣ ، ١) ، حـ = (١ ، ٤) ثم أوجد :

(١) صورة المثلث ٮ ب حـ بالإنعكاس فى محور السينات

(٢) صورة المثلث ٮ ب حـ بالإنعكاس فى محور الصادات

الحل

(١) بالإنعكاس فى محور السينات :

صورة ٮ = (٤ ، ٣) هى ٠٠٠٠

صورة ب = (٤ ، ١) هى ٠٠٠٠

صورة حـ = (١ ، ٣) هى ٠٠٠٠

∴ صورة المثلث ٮ ب حـ بالإنعكاس فى محور السينات هى ٠٠٠٠

(٢) بالإنعكاس فى محور الصادات : صورة ٮ = (٤ ، ٣) هى ٠٠٠٠

صورة ب = (٤ ، ١) هى ٠٠٠٠ صورة حـ = (١ ، ٣) ٠٠٠٠

∴ صورة المثلث ٮ ب حـ بالإنعكاس فى محور الصادات هى ٠٠٠٠

تمارين (٧)

(١) إرسم ∆ س ص ع القائم الزاوية فى ص ، فيه س ص = ٣ سم ، ص ع = ٤ سم ثم أوجد صورته بالإنعكاس فى $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$

(٢) إرسم المستطيل ٮ ب حـ ء الذى فيه ب حـ = ٦ سم ، حـ ء = ٤ سم ثم أوجد صورته بالإنعكاس فى $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$

(٣) إرسم المربع ٮ ب حـ ء الذى طول ضلعه ٥ سم ثم أوجد صورته بالإنعكاس فى $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$

(٤) إرسم دائرة طول نصف قطرها ٣ سم ثم إرسم صورتها بالإنعكاس فى المستقيم ل الذى يبعد عن مركزها ٥ سم ، ثم أوجد صورة هذه الدائرة فى مستقيم يمر بمركزها

(٥) إرسم ∆ ٮ ب حـ المتساوى الأضلاع حيث طول ضلعه ٤ سم ثم أوجد صورته بالإنعكاس فى $\overleftrightarrow{\text{ٮ ب}}$ ، وأذكر ما إسم الشكل الناتج ؟

(٦) أوجد صور النقط الآتية بالإنعكاس فى : ** محور السينات ** محور الصادات
ٮ = (٤ ، ٣) ، ب = (٣ ، ٠) ، حـ (٠ ، ٦) ، ء (١ ، –٢) ، هـ (–٣ ، –٢)

(٧) إرسم $\overline{\text{ٮ ب}}$ حيث ٮ = (٤ ، ٣) ، ب = (١ ، –٢) ثم إرسم صورتها بالإنعكاس فى :
** محور السينات ** محور الصادات

(٨) فى نظام إحداثى متعامد إرسم ∆ و ب حـ حيث و نقطة الأصل ، ب = (٣ ، ٠) ، حـ = (٣ ، ٤) ثم إرسم صورته بالإنعكاس فى محور السينات ، وأذكر ما إسم الشكل الناتج ؟

(٩) على شبكة التربيعية المتعامدة إرسم ∆ ﺃ ب ﺣ حيث ﺃ = (١ ، ٢) ، ب = (٤ ، ١) ، ﺣ = (٣ ، ٤) ثم إرسم صورته بالإنعكاس فى محور السينات

(١٠) فى نظام إحداثى متعامد إرسم المربع ﺃ ب ﺣ ء حيث ﺃ = (١ ، ١) ، ب = (٤ ، ٢) ، ﺣ = (٣ ، ٥) ، ء = (٠ ، ٤) ثم أوجد صورته بالإنعكاس فى محور الصادات

(١١) ﺃ ب ﺣ ء معين فيه ﺃ = (٢ ، – ٢) ، ب = (– ١ ، – ١) ، ء = (١ ، ١) عين من الرسم إحداثى نقطة ﺣ ثم أوجد صورة المعين بالإنعكاس فى محور السينات

(١٢) فى نظام إحداثى متعامد إرسم المستطيل ﺃ ب ﺣ ء حيث ﺃ = (٣ ، ٢) ، ب = (٨ ، ٢) ، ﺣ = (٨ ، ٦) ، ء = (٣ ، ٦) ثم أوجد صورته بالإنعكاس فى محور الصادات

(١٣) فى نظام إحداثى متعامد إرسم المربع ﺃ ب ﺣ ء حيث ﺃ = (١ ، ١) ، ب = (١ ، ٣) ، ﺣ = (– ٣ ، ٣) ، ء = (٠ ، ٤) عين من الرسم إحداثى نقطة ء ثم أوجد صورة المعين بالإنعكاس فى محور السينات

(١٤) فى نظام إحداثى متعامد إرسم المربع ﺃ ب ﺣ ء حيث ﺃ = (٢ ، ٣) ، ب = (٢ ، – ١) ثم أوجد صورته بالإنعكاس فى محور الصادات ، ماذا تلاحظ ؟

(١٥) فى نظام إحداثى متعامد إرسم المربع ﺃ ب ﺣ ء حيث ﺃ = (٠ ، ٢) ، ب = (– ٥ ، ٠) ، ﺣ = (– ٣ ، – ٥) ، ء = (٢ ، – ٣) أوجد صورته بالإنعكاس فى محور الصادات ثم أوجد طول ضلعه ، مساحته

(١٦) فى نظام إحداثى متعامد إرسم المستطيل ﺃ ب ﺣ ء حيث ﺃ = (٢ ، ٢) ، ب = (– ٣ ، ٢) ، عرضه يساوى ٣ وحدات طول بالإنعكاس فى محور السينات كم حالة يمكن رسمها ؟

(١٧) إذا كانت ﺃ ∌ لمستقيم ل ، ب ∋ للمستقيم ل ، وكانت ﺃ/ صورة ﺃ بالإنعكاس فى المستقيم ل ، و كان ﺃ ب = ٢ س وحدة طول ، ﺃ/ ب = س + ٣ وحدة طول أوجد طول $\overline{\text{ﺃ ب}}$

(١٨) إذا كانت النقطة ب صورة النقطة ﺣ بالإنعكاس فى محور السينات ، وكانت ﺣ صورة ﻫ بالإنعكاس فى محور الصادات حيث ﻫ = (٢ ، ٣) أوجد إحداثى النقطة ب

(١٩) عين على شبكة تربيعية النقط : ﺃ = (٥ ، ٤) ، ب = (٥ ، ١) ، ﺣ = (٢ ، ١) ، ﺃ/ = (٤ ، ٥) ، ب/ (١ ، ٥) ، ﺣ/ (١ ، ٢)

أولاً : إذا كان ∆ ﺃ/ ب/ ﺣ/ صورة ∆ ﺃ ب ﺣ بالإنعكاس فى المستقيم ل إرسم هذا المستقيم

ثانياً : إذا كان الشكل ﺃ ب ب/ ﺃ/ صورة الشكل ﺣ ب ب/ ﺣ/ بالإنعكاس فى المستقيم م إرسم هذا المستقيم

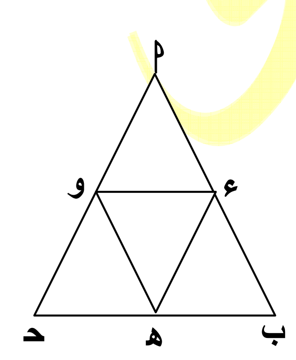
(٢٠) فى الشكل المقابل : ∆ ﺃ ب ﺣ متساوى الأضلاع فيه ء ، ﻫ ، و منتصفات $\overline{\text{ﺃ ب}}$ ، $\overline{\text{ب ﺣ}}$ ؛ $\overline{\text{ﺃ ﺣ}}$ على الترتيب أكمل ما يأتى :

(١) $\overline{\text{ﺃ ب}}$ هى صورة $\overline{\text{ﺃ ﺣ}}$ بالإنعكاس فى ....

(٢) صورة ﺣ ﻫ بالإنعكاس فى $\overleftrightarrow{\text{ﻫ و}}$ هى ....

(٣) ∆ .... صورة ∆ ﺃ و ء بالإنعكاس فى $\overleftrightarrow{\text{ء و}}$

(٤) صورة ∆ ب ء ﻫ بالإنعكاس فى $\overleftrightarrow{\text{ء ﻫ}}$ هى ....

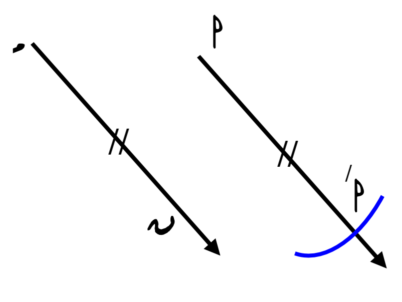


الإنتقال

* الإنتقال هو تحويل هندسى يحول (يزيح) كل نقطة ٩ فى المستوى إلى نقطة ٩/ فى نفس المستوى مسافة ثابتة فى إتجاه معين
* لتحديد الإنتقال يلزم معرفة : (١) إتجاه الإنتقال (٢) مسافة الإنتقال

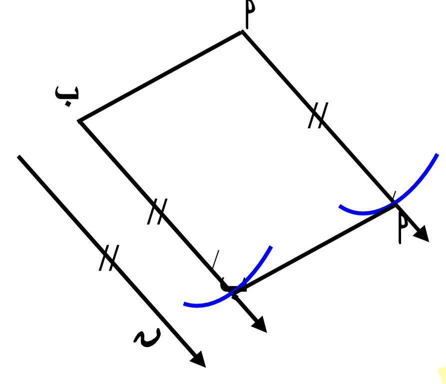


** إيجاد صورة نقطة بإنتقال معلوم



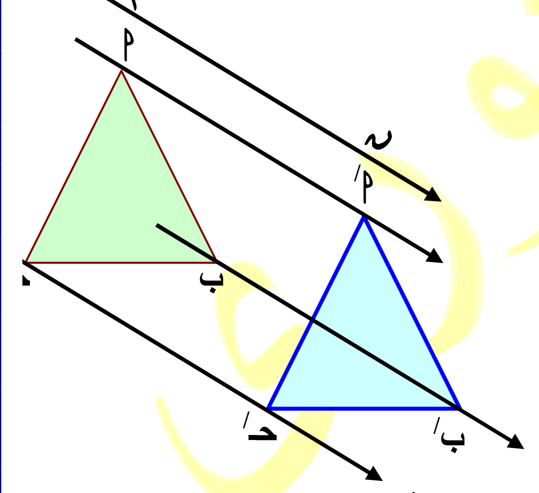
لإيجاد ٩/ صورة ٩ بإنتقال م ں فى إتجاه م ں نتبع التالى :
(١) نرسم من ٩ شعاعاً يوازى م ں وفى نفس إتجاهه
(٢) نفتح الفرجار فتحة طولها يساوى م ں ونركز فى ٩ ونرسم قوساً
يقطع الشعاع المرسوم من ٩ فى ٩/ " ٩ ٩/ = م ں ، ٩ ٩/ // م ں "
فتكون ٩/ صورة ٩ بإنتقال م ں فى إتجاه م ں

** إيجاد صورة قطعة مستقيمة بإنتقال معلوم



لإيجاد صورة ٩ ب بإنتقال م ں فى إتجاه م ں نتبع التالى :
(١) نوجد ٩/ صورة ٩ بالإنتقال المعلوم كما سبق
(٢) نوجد ب/ صورة ب بالإنتقال المعلوم كما سبق
(٣) نرسم ٩/ ب/ فتكون هى صورة ٩ ب بإنتقال م ں فى إتجاه م ں
تحقق من أن : ٩ ب = ٩/ ب/ ، ٩ ب // ٩/ ب/

** إيجاد صورة مضلع بإنتقال معلوم



لإيجاد صورة مضلع " Δ ٩ ب حـ " بإنتقال م ں فى إتجاه م ں
نعين: النقط ٩/ ، ب/ ، حـ/ صور النقط ٩ ، ب ، حـ على الترتيب
بالإنتقال المعلوم كما سبق فيكون المضلع " Δ ٩/ ب/ حـ/ "
هو صورة المضلع " Δ ٩ ب حـ " بالإنتقال المعلوم

ملاحظات :

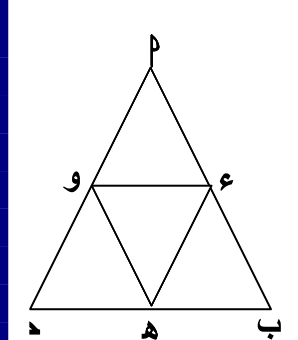
** الصورة Δ ٩/ ب/ حـ/ تطابق الأصل Δ ٩ ب حـ
** أطوال الأضلاع المتناظرة متساوية : ٩/ ب/ = ٩ ب ، ب/ حـ/ = ب حـ وهكذا
** قياسات الزوايا المتناظرة متساوية : ق (∠ ٩/) = ق (∠ ٩) ، ق (∠ ب/) = ق (∠ ب)
وهكذا
** الإنتقال هو تحويلة هندسية تحول الشكل الهندسى إلى شكل هندسى آخر مطابق له

** الإنتقال يحافظ على الترتيب الدورانى لرؤوس الشكل لأن رؤوس المضلع " Δ ؟ ب حـ " تسير فى إتجاه عقارب
الساعة و أيضاً رؤوس المضلع " Δ ؟َ بَ حـَ " تسير فى إتجاه عقارب الساعة

تدريب (١) : إرسم Δ ؟ ب حـ القائم الزاوية فى ؟ ، الذى فيه
؟ حـ = ٣ سم ، ؟ ب = ٤ سم ثم إرسم صورته
بإنتقال مسافة ٤ سم فى إتجاه ب ؟ ماذا تلاحظ ؟

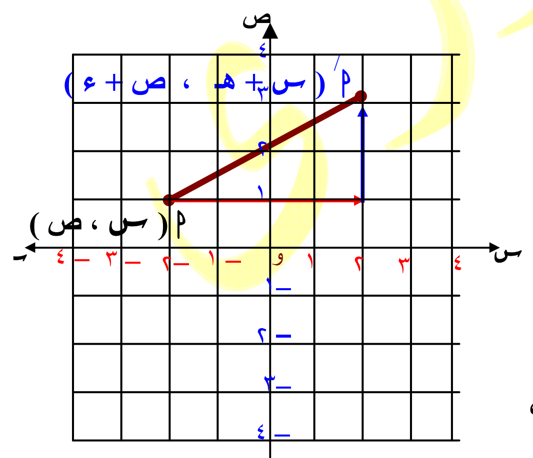
تدريب (٢) : إرسم Δ ؟ ب حـ قائم الزاوية فى ب فيه ؟ ب = ٤ سم ، ب حـ = ٣ سم ثم أوجد :
صورته بإنتقال مسافة ٣ سم فى إتجاه ؟ ب
، صورته بإنتقال مسافة ٦ سم فى إتجاه ؟ حـ

تدريب (٣) : فى الشكل المقابل : Δ ؟ ب حـ متساوى الأضلاع طول ضلعه ٤ سم
، ء ، هـ ، و منتصفات ؟ ب ؛ ب حـ ، حـ ؟ على الترتيب أكمل ما يأتى :



(١) صورة Δ ب ء هـ بإنتقال مسافة ٢ سم فى إتجاه ب ء
هى .... ، ء هـ = ... لأن الإنتقال يحافظ على ....
(٢) Δ ب ء هـ صورة Δ هـ و حـ بإنتقال مسافة .... سم
فى إتجاه ....
(٣) Δ .... صورة Δ ؟ و ء بإنتقال مسافة ٢ سم فى إتجاه ء هـ

الإنتقال فى المستوى الإحداثى



الإنتقال فى المستوى الإحداثى يحول كل نقطة إزاحة سينية هـ
يتبعها إزاحة صادية ء بحيث :
؟ (س ، ص) ← ؟َ (س + هـ ، ص + ء)
فمثلاً : صورة النقطة ؟ (-١ ، ١) بإنتقال
(س ، ص) ← (س + ٤ ، ص + ٢) هى النقطة ؟َ (٣ ، ٣)
لأن : ؟َ (-١ + ٤ ، ١ + ٢) = ؟َ (٣ ، ٣)

ملاحظة :
الإنتقال مسافة ؟ ب فى إتجاه ؟ ب حيث ؟ (٢ ، ١) مثلاً ،
ب (٥ ، ٦) مثلاً يكافئ :
إزاحة سينية " أفقية " من ٢ إلى ٥ تساوى ٣ " ٥ – ٢ = ٣ " ،

إزاحة صادية " راسية " من ١ إلى ٦ تساوى ٥ " ٦ – ١ = ٥ "
، يكون الإنتقال هو : (س ، ص) ← (س + ٣ ، ص + ٥)
، تكون صورة حـ (– ١ ، ٤) بهذا الإنتقال هى : (– ١ + ٣ ، ٤ + ٥) = (٢ ، ٩)

تدريب (١) : أكمل الجدول التالى :

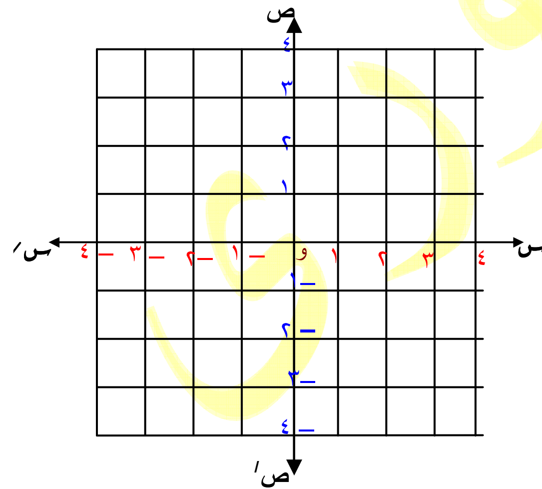
	النقطة	(٤ ، ٣)	(٢ ، – ٣)	(١ ، – ٥)
صورة النقطة بالإنتقال	(س ، ص) ← (س + ١ ، ص – ٢)			
	(س ، ص) ← (س + ١ ، ص – ٢)			
	(س ، ص) ←	(٣ ، – ١)		(– ١ ، ٥)

تدريب (٢) : فى مستوى إحداثى متعامد إرسم المربع ٨ ب حـ ء حيث ٨ = (٤ ، ٤) ، ب = (١ ، ٤)
، حـ = (١ ، ١) ، ء = (٤ ، ١) ثم أوجد : صورة المربع ٨ ب حـ ء بالإنتقال
(س ، ص) ← (س – ٥ ، ص – ٢)

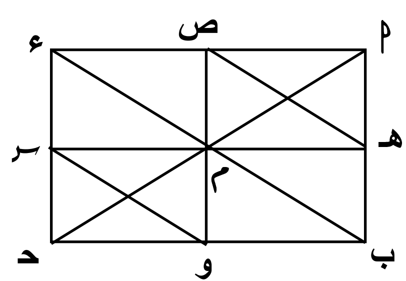
الحل

صورة ٨ هى ٨/ (٤ – ٥ ، ٤ – ٢) = ...
صورة ب هى ب/ (.... ، ....) = (– ٤ ، ٢)
صورة حـ هى حـ/ (.... ، ....) = ...
صورة ء هى ء/ (.... ، ....) = ...

تدريب (٤) : على شبكة تربيعية إرسم $\overline{\text{٨ ب}}$ حيث
٨ = (٣ ، – ١) ، ب = (١ ، ٣)
ثم إرسم صورتها بالإنتقال (– ٣ ، ٠) ثم أذكر إسم
الشكل ٨ ب ب/ ٨/



تمارين (٨)



(١) فى الشكل المقابل : أ ب حـ ء مستطيل تقاطع قطراه فى م
هـ ، و ، س ، ص منتصفات أضلاعه أكمل ما يأتى :
١ – صورة أ هـ بالإنتقال أ هـ فى إتجاه أ هـ هى ....
٢ – صورة Δ أ هـ ص بالإنتقال أ ص فى إتجاه أ ص هى ....
٣ – Δ م س ء صورة Δ .... بالإنتقال م و فى إتجاه م و
٤ – المستطيل و حـ س م صورة المستطيل هـ م ص أ بإنتقال مسافة .... فى إتجاه ....

(٢) إرسم أ ب طولها ٤ سم ثم إرسم صورتها بإنتقال مسافة ٣ سم فى إتجاه أ ب

(٣) إرسم Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب فيه أ ب = ٤ سم ، ب حـ = ٣ سم ثم إرسم صورته بإنتقال مسافة ٣ سم فى إتجاه ب أ

(٤) إرسم Δ أ ب حـ المتساوى الأضلاع و الذى طول ضلعه ٤ سم ثم أوجد صورته بإنتقال قدره ٤ سم فى إتجاه ب حـ

(٥) إرسم المربع أ ب حـ ء طول ضلعه ٣ وحدة طول ثم إرسم صورته بالإنتقال أ ب فى إتجاه أ حـ ، وإذا وصلت كل نقطة بصورتها فأذكر ما إسم الشكل الناتج ؟

(٦) فى نظام إحداثى متعامد إرسم المربع أ ب حـ ء حيث أ = (١ ، ١) ، ب = (٤ ، ٢) ، حـ = (٣ ، ٥) ، ء = (٠ ، ٤) ثم أوجد صورته :
١ – بالإنتقال (س ، ص)⟵(س – ١ ، ص + ١)
٢ – بالإنتقال أ ب فى إتجاه أ ب مبيناً قاعدة هذا الإنتقال

(٧) إرسم Δ و ب حـ حيث و نقطة الأصل ، ب (٢ ، – ١) ، حـ (١ ، ٢) ثم إرسم صورته بالإنتقال (س ، ص)⟵(س – ١ ، ص + ٢)

(٨) النقطة أ/ (٣ ، – ٣) هى صورة النقطة أ بإنتقال قاعدته (س ، ص)⟵(س – ١ ، ص – ٤) إرسم النقطتين أ ، أ/ على الشبكة التربيعية و بنفس الإنتقال أوجد صورة Δ أ ب حـ حيث ب (٥ ، ٠) ، حـ (– ١ ، – ٢)

(٩) إذا كانت أ (٢ ، – ٣) ، ب (٠ ، ١) ، حـ (– ٣ ، – ٢) فأوجد :
١ – الإنتقال الذى يجعل أ صورة ب ٢ – الإنتقال الذى يجعل حـ صورة أ
٣ – الإنتقال الذى يجعل حـ صورة ب ٤ – الإنتقال الذى يجعل ب صورة حـ

(١٠) إذا كانت حـ (– ٣ ، – ١) هى صورة ب بالإنعكاس فى محور الصادات ، أ هى صورة ب بالإنعكاس فى محور السينات فأوجد الإنتقال الذى يجعل أ صورة حـ

الدوران

الدوران فى المستوى هو تحويلة هندسية تدور الشكل حول نقطة بزاوية معينة

* لإيجاد صورة نقطة بدوران معين يجب معرفة العناصر :

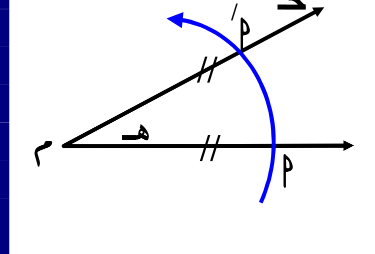
(١) م مركز الدوران　　(٢) قياس زاوية الدوران " هـ ْ "　　(٣) إتجاه الدوران

ملاحظات :

(١) الدوران يتحدد تماماً عند تحديد مركز الدوران ، قياس زاويته ، إتجاه الدوران

(٢) قياس زاوية الدوران يكون موجباً إذا كان الدوران ضد إتجاه عقارب الساعة ، ويكون سالباً إذا كان الدوران مع إتجاه عقارب الساعة

** إيجاد صورة نقطة بدوران معلوم



١ ـ لإيجاد ؐ/ صورة ؐ بالدوران حول نقطة م بزاوية قياسها هـ نتبع الآتى :

(١) نرسم الشعاع م ؐ

(٢) نركز بمركز المنقلة على م ؐ وفى عكس إتجاه عقارب الساعة و نرسم م حـ بحيث ق (∠ ؐ م حـ) = هـ

(٣) نركز بسن الفرجار عند م و بفتحة طولها م ؐ نرسم قوساً يقطع م حـ فى ؐ/ فتكون ؐ/ هى صورة ؐ بالدوران المطلوب

---

٢ ـ لإيجاد ؐ/ صورة ؐ بالدوران حول نقطة م بزاوية قياسها ـ هـ نتبع الآتى :

نكرر نفس الخطوات السابقة ولكن نرسم م حـ فى إتجاه حركة عقارب الساعة

ملاحظة :

إذا كانت ؐ/ هى صورة ؐ بدوران حول م بزاوية قياسها (هـ ْ)

فإن ؐ هى صورة ؐ/ بدوران حول م بزاوية قياسها (ـ هـ ْ)

---

* إيجاد صورة قطعة مستقيمة بدوران معلوم

لإيجاد صورة ؐ ب بدوران معلوم نتبع الآتى :

(١) نوجد ؐ/ صورة ؐ بالدوران المعلوم كما سبق

(٢) نوجد ب/ صورة ب بالدوران المعلوم كما سبق

(٣) نرسم ؐ/ب/ فتكون هى صورة ؐ ب بالدوران المعلوم تحقق من أن : ؐ ب = ؐ/ ب/

مثال : فى الشكل المقابل : أوجد صورة $\overline{\text{أ ب}}$ بالدوران حول م بزاوية قياسها ٦٠°

الحل

** نرسم الشعاع $\overrightarrow{\text{م أ}}$ ونركز بمركز المنقلة على م بحيث يشير $\overrightarrow{\text{م أ}}$ إلى الرقم صفر فى المنقلة ثم نرسم $\overrightarrow{\text{م حـ}}$ بحيث :
ق (∠ أ م حـ) = ٦٠°

** نركز بسن الفرجار عند م وبفتحة طولها م أ نرسم قوساً يقطع $\overrightarrow{\text{م حـ}}$ فى نقطة ولتكن أ/ فتكون أ/ هى صورة أ بالدوران حول م بزاوية قياسها ٦٠°

** بالمثل نتبع نفس الخطوات لإيجاد ب/ صورة ب

** نرسم $\overline{\text{أ/ ب/}}$ فتكون هى صورة $\overline{\text{أ ب}}$ بالدوران المطلوب

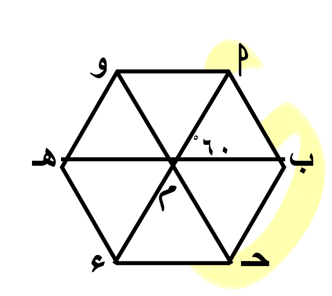
*** إيجاد صورة مضلع بدوران معلوم**

لإيجاد صورة مضلع معلوم بدوران معلوم نوجد صورة كل رأس من رؤوس المضلع بالدوران المطلوب ثم نصل بين صور الرؤوس المتتالية فنحصل على الصورة المطلوبة ونلاحظ :

** المضلع الأصلى وصورته متطابقان
** أطوال الأضلاع المتناظرة متساوية
** قياسات الزوايا المتناظرة متساوية
** الإنتقال هو تحويلة هندسية تحول الشكل الهندسى إلى شكل هندسى آخر مطابق له
** الإنتقال يحافظ على الترتيب الدورانى لرؤوس الشكل
لأن رؤوس المضلع وصورته تسير فى إتجاه عقارب الساعة

تدريب (١) : إرسم △ أ ب حـ القائم الزاوية فى ب ثم أوجد صورته بالدوران حول ب بزاوية قياسها ٩٠°

تدريب (٢) : فى الشكل المقابل أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم مركزه م أكمل ما يأتى :



(١) صورة النقطة ب بالدوران حول م بزاوية قياسها ١٨٠°
هى ....

(٢) صورة $\overline{\text{أ ب}}$ بالدوران حول م بزاوية قياسها (ـ ٦٠°)
هى ....

(٣) △ م هـ ء صورة △ .... بالدوران حول م بزاوية قياسها (ـ ١٢٠°)

(٤) الدوران الذى يحول △ م أ ب إلى △ م هـ و هو ....

(٥) صورة △ ب م حـ بالدوران حول م بزاوية قياسها ٦٠°
هى ....

(٦) صورة △ م حـ ء بالدوران حول م بزاوية قياسها ١٢٠° هى ....

الدوران فى المستوى الإحداثى

الدوران حول نقطة الأصل (و) :

(١) بزاوية قياسها ٩٠ ° يحول النقطة (س ، ص) إلى النقطة (ــ ص ، س)

(٢) بزاوية قياسها ± ١٨٠ ° يحول النقطة (س ، ص) إلى النقطة (ــ س ، ــ ص)

(٣) بزاوية قياسها ٢٧٠ ° أو ــ ٩٠ ° يحول النقطة (س ، ص) إلى النقطة (ص ، ــ س)

(٤) بزاوية قياسها ١٨٠ ° يكافئ إنعكاس فى محور السينات متبوعاً بإنعكاس فى محور الصادات

(٥) بزاوية قياسها ١٨٠ ° أو ــ ١٨٠ ° (يسمى دوران نصف دورة) " وهما متكافئان " و يكافئان إنعكاس فى نقطة الأصل

(٦) بزاوية قياسها ٣٦٠ ° أو ــ ٣٦٠ ° يسمى دوران محايد لأنه يحول الشكل إلى وضعه الأصلى ، وتكون صورة كل نقطة منطبقة على النقطة نفسها

(٧) بزاوية قياسها ــ ٢٧٠ ° يكافئ الدوران بزاوية قياسها ٩٠ °

تدريب (١) : أكمل الجدول التالى :

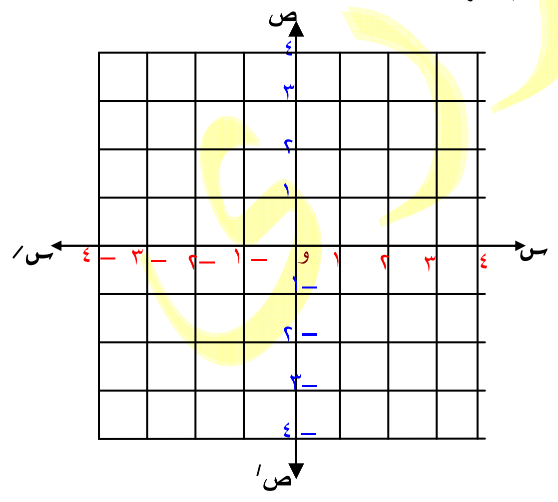
النقطة	صورة النقطة بالدوران حول نقطة الأصل (و)				
	٩٠ ° أو ــ ٢٧٠ °	١٨٠ ° أو ــ ١٨٠ °	٢٧٠ °	٣٦٠ °	ــ ٩٠ °
(٣ ، ٤)	(ــ٤ ، ٣)	(ــ٣ ، ــ ٤)	(٣ ، ــ ٤)	(٣ ، ٤)	(٣ ، ــ ٤)
	(١ ، ــ ٥)				
		(ــ٢ ، ٣)			
			(ــ ٣ ، ــ ١)		
				(٠ ، ٤)	
					(٤ ، ٢)

تدريب (٢) : فى مستوى إحداثى متعامد إرسم Δ ٮ ب حـ حيث ٮ = (١ ، ٠) ، ب = (٢ ، ٣) ، حـ = (٤ ، ٢) ثم أوجد : صورة Δ ٮ ب حـ بالدوران حول نقطة الأصل :

بزاوية قياسها ٩٠ °　،　بزاوية قياسها ١٨٠ °



الحل



تمارين (٩)

(١) فى الشكل المقابل :
ﻫ ب حـ ء مربع ، هـ ، و ، س ، ص منتصفات أضلاعه
أكمل ما يأتى :
١ – صورة ﻫ هـ بالدوران حول م بزاوية قياسها ٤٥° هى ....
٢ – صورة Δ ﻫ هـ ص بالدوران حول م بزاوية قياسها ٩٠° هى ....
٣ – Δ م س ص صورة Δ .... بالدوران حول م بزاوية قياسها ١٨٠°
٤ – المربع و حـ س م صورة المربع هـ م ص ﻫ بالدوران حول .... بزاوية قياسها ....°

(٢) إرسم ﻫ ب طولها ٣ سم ثم أوجد صورتها :
١ – بالدوران حول ﻫ بزاوية قياسها ٦٠°
٢ – بالدوران حول ب بزاوية قياسها – ١٥٠°

(٣) إرسم Δ ﻫ ب حـ المتساوى الأضلاع وطول ضلعه ٤ سم ثم أوجد صورته :
١ – بالدوران حول ﻫ بزاوية قياسها ٦٠°
٢ – بالدوران حول ب بزاوية قياسها – ١٢٠°

(٤) إرسم Δ ﻫ ب حـ الذى فيه ﻫ ب = ٣ سم ، ب حـ = ٤ سم ، ﻫ حـ = ٥ سم ثم أوجد صورته :
١ – بالدوران حول ﻫ بزاوية قياسها ٩٠°
٢ – بالدوران حول ب بزاوية قياسها – ٦٠°
٣ – بالدوران حول حـ بزاوية قياسها ١٢٠°

(٥) على شبكة التربيعية المتعامدة إرسم Δ ﻫ ب حـ حيث ﻫ = (١ ، ٢) ، ب = (٤ ، ١)
، حـ = (٣ ، ٤) ثم إرسم صورته بالدوران حول نقطة الأصل :
** بزاوية قياسها ٩٠° ** بزاوية قياسها ١٨٠°

(٦) فى نظام إحداثى متعامد إرسم Δ و ب حـ حيث و نقطة الأصل ، ب (٣ ، ٠) ، حـ (٣ ، ٤)
ثم بين على الرسم :
١ – صورة Δ و ب حـ بالدوران حول و بزاوية قياسها ٩٠°
٢ – صورة Δ و ب حـ بالدوران حول و حيث : (س ، ص) ← (– س ، – ص)

(٧) إرسم ﻫ ب ثم عين ب/ صورة ب بدوران حول ﻫ بزاوية قياسها ٦٠° ، و إذا كان ﻫب = (٣ س – ١٠) سم
، ﻫ ب/ = (س + ٢) سم أوجد طول ﻫ ب

(٨) إرسم المستطيل ﻫ ب حـ ء الذى فيه ﻫ ب = ٣ سم ، ب حـ = ٤ سم ، م نقطة تقاطع قطريه
، ق (∠ ﻫ ب م) = ٥٥° ثم أوجد صورته :
١ – بالدوران حول م بزاوية قياسها = ق (∠ ﻫ ب م)
٢ – بالدوران حول ﻫ بزاوية قياسها – ٦٠°

المميز

في

الإحصاء

للصف الأول الإعدادي
الفصل الدراسى الثانى

أ/ أحمد الشننورى

العينـــــات

مفهوم العينة :

العينة هى : جزء صغير من مجتمع كبير تشبه المجتمع وتمثله وتختار بطريقة عشوائية وتستخدم لتسهيل جمع البيانات عن المجتمع محل الدراسة والتى تكون أقرب للواقع ويمكن إتخاذ القرارات فى ضوء نتائج دراسة هذه العينات و من ثم تعميمها على المجتمع بأكمله

المجتمـــع : هو عناصر البحث " أشخاص ، منتج معين ، برامج إعلامية ، صحف ٠٠٠٠ إلخ "

أهمية العينة :

للعينة أهمية كبيرة فى الدراسات والبحوث العلمية والإجتماعية وتستخدم العينات لتسهيل جمع البيانات عن المجتمع والتى تكون أقرب للواقع ويمكن إتخاذ قرارات فى ضوئها وتعميمها على المجتمع

مميزات العينة : ١ ــ توفيـــــر الوقت   ٢ ــ توفيـــــر المال   ٣ ــ توفــــــير الجهد

أنواع العينـات : يوجد عدة أنواع من العينات منها:

العينة المنتظمة :

هى العينة التى تتبع نظاماً أو نسقاً معيناً عند إختيارها من مجتمعاً ما و لابد أن يكون المجتمع موزعاً توزيعاً عشوائياً أى أنه لا يكون مقسما إلى فئات أو مجموعات بعينها وأن تمثل (١٠ ٪) من المجتمع الذى تختار منه العينة

فمثلاً : إذا كان عدد طلاب مدرسة ٣٠٠ طالب فيتم إختيار ١٠ ٪ من العدد الإجمالى للطلاب وهم ٣٠ طالب وأن يتم إختيارهم من جميع فصول المدرسة دون إستثناء على أن يكون طلاب المدرسة موزعين توزيعا عشوائيا ثم نختار بطريقة منتظمة كل عاشر طالب فيهم

العينــة العشوائية :

هى العينة التى يتم إختيارها عشوائياً أى بدون دون قصد أو تعمد من مجتمع يكون لكل فرد فيه نفس فرصة الإختيار ويتم الإختيار بعدة طرق منها :

يدويـــاً :

وتتم كالتالى :

١ ــ يعطى كل فرد فى مجتمع الدراسة رقم فى قصاصة ورق وتكون جميع القصاصات متماثلة من حيث اللون والمقاس

٢ ــ تطبق كل قصاصة بطريق متماثلة وتوضع فى إناء وتخلط جيداً

٣ ــ يتم إختيار العينة بإختيار ورقة تلو الأخرى وفى كل مرة تخلط الأوراق جيداً حتى الإنتهاء من إختيار العدد المطلوب للعينة

آليــاً :

** **إستخدام الرقم العشوائى بالآلة الحاسبة :**

ويتم ذلك بالضغط على المفاتيح التالية بالترتيب

Shift	Ran #	=

فيظهر فى كل مرة رقم عشوائى بين صفر ، ٠,٩٩٩ ، نأخذ الأرقام ونتجاهل العلامة العشرية ، وتستبعد الأرقام الأكبر من مجتمع الدراسة والأرقام المختارة من قبل

مثال :

إذا كان عدد عناصر المجتمع ٢٥٧ مثلاً ، يعطى كل عنصر رقم من ١ إلى ٢٥٧

يتم إختيار ١٠ ٪ من العينات أى ٢٦ ثم نستخدم الحاسبة كالآتى :

أضغط Shift ثم Ran # ثم = يظهر رقم عشرى مثل ٠,٠٣٨

نأخذ الرقم بعد تجاهل العلامة العشرية فيكون ٣٨
نختار الرقم ٣٨ كأحد عناصر العينة العشوائية
نكرر هذه الخطوات لإختيار ٢٦ عنصراً

فى حالة ظهور رقم أكبر من ٢٥٧ " عدد عناصر المجموعة " يتم إستبعاده و إعادة المحاولة

**** إستخدام برنامج " Excel " بالحاسب الآلى عن طريق الدالة العشوائية :**

١ ـ أضغط " إبدأ " Start ثم برامج Allprograms ثم إختر Microsoft Excel
٢ ـ إختر الخلية A١ أكتب ١ ثم أضغط إدخال " Enter " ثم أكتب ٢
٣ ـ أضغط " Control " وحرك المؤشر عند المربع الصغير أسفل يمين ركن الخلية A٢ إسحب ببطء لأسفل لتصل إلى الرقم المطلوب (إجمالى العينة مثلا ٣٠٠) ثم أرفع يدك
٤ ـ إختر بالترتيب أدوات " Tools " وظائف إضافية " Add ins "
ضع علامة Y أمام Analysis Toolpak ثم موافق ok
ثم أختر أدوات Tools ثم Data analysis ثم Sampling ثم موافق ok
٥ ـ أدخل المدى Input Range وأكتب $A$1:$A$300 ثم موافق ok
٦ ـ أضغط Randam عدد العينات ٣٠ ثم موافق ok
٧ ـ أضغط Output Range وأكتب $C$1 ثم موافق ok تظهر فى العمود c الأعداد (٣٠ عدد العشوائية المطلوبة) dam عدد العينات 30 ثم موافق ok

---

تدريب :

(١) أكمل ما يلى :
١ ـ حجم العينة المنتظمة يمثل ....٪ من مجتمع البحث
٢ ـ إذا كان الرقم العشرى الظاهر على الشاشة هو ٠,١٣٤ فإن رقم العنصر هو ....
٣ ـ إذا كان عدد عناصر المجتمع ٤٩٨ عنصر فإن حجم العينة = ... عنصر
٤ ـ يتم إستخدام الحاسبة إختيار أرقام العينة العشوائية بالضغط على ....

الإحتمال

الإحتمال :
هو التنبؤ بما يمكن أن يحدث فى المستقبل إستناداً على الخبرات السابقة أو الدراسات والملاحظات

الإحتمال التجريبى : هو الإحتمال الناتج عن إجراء تجربة ما عمليا

مثل : رمى قطعة نقود أو رمى حجر نرد أو دوران مؤشر لعبة الدوارة

$$\text{الإحتمال التجريبى} = \frac{\text{عدد النواتج التى حصلت عليها}}{\text{عدد النواتج الممكنة}}$$

ملاحظات : ** تسمى نتائج التجربة أحداثا أو نواتج
** كلما زاد عدد مرات إجراء التجربة كلما حصلنا على قيمة أدق للإحتمال

تدريبات :

(١) تجربة إلقاء قطعة نقود
١ ـ ألق قطعة نقود ٤٠ مرة
٢ ـ سجل النواتج فى الجدول
٣ ـ أحسب :
إحتمال ظهور الصورة =
إحتمال ظهور الكتابـة =

العلامة الإحصائية	صورة	كتابة	المجموع
العلامة الإحصائية			
التكرار			٤٠

---

(٢) تجربة إلقاء حجر نرد منتظم
١ ـ ألق حجر نرد منتظم ٥٠ مرة
٢ ـ سجل النواتج التى تظهر على الوجه العلوى فى الجدول
٣ ـ أحسب :
إحتمال ظهور رقم ٤ =
إحتمال ظهور رقم ٣ =

	١	٢	٣	٤	٥	٦	المجموع
العلامة الإحصائية							
التكرار							٦٠

---

(٣) فى تجربة إلقاء قطعة نقود ٤٠٠ مرة سجلت نتائج ظهور الصورة ١٩٦ مرة أحسب إحتمال ظهور الصورة ، إحتمال ظهور الكتابة
عدد مرات ظهور الصورة = ١٩٦ مرة
إحتمال ظهور الصـــــورة = ... = ... = ... ٪
عدد مرات ظهور الكتابة = ٤٠٠ ـ ...... = ... مرة
إحتمال ظهور الكتـــــــابة = ... = ... = ... ٪

الإحتمال النظرى

الإحتمال النظرى و التجريبى مرتبطان ببعضهما فكلما زاد عدد مرات إجراء التجربة كلما تقاربت نتائج الإحتمال التجريبى من قيمة الإحتمال النظرى
ويستخدم الإحتمال النظرى عندما تكون لجميع النواتج نفس الفرصة للظهور
أى أن الإحتمال النظرى يقوم على مبدأ تكافؤ الفرص أو تساوى الإمكانات

فمثلاً عند :
إلقاء قطعة نقود منتظمة وملاحظة الوجه الظاهر تكون فرصة ظهور الصورة (ص) مساوية لظهور فرصة ظهور الكتابة (ك) أى أن مجموعة جميع النواتج هى : { صورة ، كتابة }
وتسمى هذه المجموعة فضاء العينة

فضاء العينة :
هو مجموعة جميع النواتج الممكنة للتجربة العشوائية وعدد عناصرها ن (ف)

الحدث :
هو مجموعة جزئية من فضاء العينة
فإذا كان : ﺃ حدث فى ف فإن : ﺃ ⊂ ف
وعدد عناصره " ن (ﺃ) " وهو عدد فرص وقوع الحدث ﺃ
و يكون : إحتمال وقوع أى حدث ﺃ ⊂ ف ويرمز له بالرمز ل (ﺃ)

فمثلا : إذا كان ﺃ هو حدث ظهور رقم زوجى عند إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة وملاحظة الرقم الظاهر على الوجه العلوى فإن : ﺃ = { ٢ ، ٤ ، ٦ }
لاحظ أن : ﺃ = { ٢ ، ٤ ، ٦ } ⊂ ف
ويرمز إحتمال وقوع الحدث ﺃ بالرمز : ل (ﺃ)

حساب إحتمال وقوع أى حدث ا حيث ﺃ ⊂ ف :

ل (ﺃ) = عدد عناصر الحدث ﺃ / عدد عناصر فضاء العينة أى أن : ل (ﺃ) = ن (ﺃ) / ن (ف)

لاحظ أن : ٠ ≤ ل (ﺃ) ≤ ١

* **الحدث المستحيل :** هو الحدث الذى ليس له أى فرصة للوقوع
أى أن : إحتمال الحدث المستحيل = صفر
* **الحدث المؤكد :** هو الحدث الذى له كل النواتج الممكنة
أى أن : إحتمال الحدث المؤكد = ١

تدريبات :
(١) ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة وملاحظة الوجه الظاهر على الوجه العلوى
أوجد إحتمال ظهور الأحداث الآتية :
ﺃ) العدد ٣ ب) عدد زوجى
ﺟ) عدد أولى فردى ء) عدد أقل من أو يساوى ٢
ﻫ) عدد أكبر من ٦ و) عدد س حيث : ١ ≤ س ≤ ٦

الحل

(١) إحتمال ظهور العدد ٣ هو ؞ = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ }

∴ ل (؞) = ن (؞) / ن (ف) = ‥‥ = ‥‥

(٢) إحتمال ظهور عدد زوجى هو ب = { ‥‥ ، ‥‥ ، ‥‥ ، ‥‥ }

∴ ل (ب) = ‥‥ = ‥‥ = ‥‥

(٣) إحتمال ظهور عدد فردى أولى هو حـ = { ‥‥ }

∴ ل (حـ) = ‥‥ = ‥‥ = ‥‥

(٤) إحتمال ظهور عدد أقل من أو يساوى ٢ هو ء = { ‥‥ }

∴ ل (ء) = ‥‥ = ‥‥ = ‥‥

(٥) إحتمال ظهور عدد أكبر من ٦ هو هـ = { ‥‥ }

∴ ل (هـ) = ‥‥ = ‥‥ = ‥‥

(٦) إحتمال ظهور عدد س حيث : ١ ≤ س ≤ ٦ هو و = { ‥‥ }

∴ ل (و) = ‥‥ = ‥‥ = ‥‥

تدريب (٢) : مجموعة مكونة من ١٠٠ طالب نجح منهم ٦٠ طالب فى الرياضيات ، ٥٥ طالب فى العلوم ، ٤٠ طالب فى الرياضيات والعلوم معاً فإذا أختير طالب عشوائياً أوجد إحتمال :

؞ = حدث أن يكون الطالب المختار ناجحاً فى الرياضيات

ب = حدث أن يكون الطالب المختار ناجحاً فى العلوم

حـ = حدث أن يكون الطالب المختار راسباً فى الرياضيات والعلوم معاً

الحل

∵ ن (؞) = ‥‥ ، ن (ف) = ‥‥

∴ ل (؞) = ‥‥

∵ ن (ب) = ‥‥

∴ ل (ب) = ‥‥

∵ ن (حـ) = ١٠٠ – ٤٠ = ‥‥

∴ ل (حـ) = ‥‥

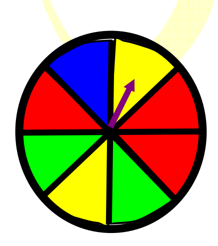
---

(٣) فى لعبة الدوارة إذا كان القرص مقسم إلى ٨ قطاعات دائرية متساوية المساحة ملونة كما بالشكل فإذا دار المؤشر ما إحتمال وقوفه فى قطاع :



؞) أحمر ب) ليس أحمر حـ) أزرق

الحل



∵ ن (ف) = ‥‥ ، عدد القطاعات الحمراء = ‥‥

∴ إحتمال وقوف المؤشر فى قطاع أحمر = ‥‥

∵ عدد القطاعات غير الحمراء = ‥‥

∴ إحتمال وقوف المؤشر فى قطاع ليس أحمر = ‥‥

∵ عدد القطاعات الزرقاء = ‥‥

∴ إحتمال وقوف المؤشر فى قطاع أزرق = ‥‥

تمارين

(١) صندوق به ٥ كرات بيضاء ، ٣ كرات حمراء ، ٧ كرات سوداء كلها متماثلة إلا من حيث اللون فإذا سحبت كرة واحدة عشوائياً فأوجد إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة :
ﺃ) بيضاء　　ب) حمراء أو سوداء　　حـ) ليست سوداء

(٢) ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة أوجد إحتمال الحصول على :
ﺃ) العدد ٥　　ب) العدد ٣ أو العدد ٤
حـ) عدد فردى　　ء) عدد زوجى أولى
هـ) عدد أكبر من ٦　　و) عدد أقل من ٧

(٣) مجموعة متماثلة من البطاقات على كل واحدة حرف من حروف كلمة " الرياضيات " فإذا سحبت بطاقة واحدة عشوائياً فما إحتمال أن يكون مكتوباً عليها حرف
ﺃ) ض　　ب) ر　　حـ) ي

(٤) فى زيارة لأحد بيوت الشباب وجد به ٣٦ شاباً من عدة محافظات منهم ١٠ من أسوان ، ١٢ من السويس ، ١٤ من القاهرة ، ٤ من البحيرة فإذا أختير عشوائياً شاب واحد فما إحتمال أن يكون الشاب المختار :
ﺃ) من أسوان　　ب) من البحيرة　　حـ) ليس من السويس

(٥) من مجموعة الأرقام { ٢ ، ٣ ، ٥ } كون عدداً مكون من رقمين مختلفين ثم أوجد كلاً من الأحداث الآتية :
ﺃ) حدث أن يكون رقم العشرات فردياً
ب) حدث أن يكون رقم العشرات زوجياً
حـ) حدث أن يكون مجموع الرقمين ٧
ء) حدث أن يكون حاصل ضرب الرقمين ١٥

(٦) فصل دراسى به ٤٠ طالب نجح منهم ٣٠ طالب فى الرياضيات ، ٢٤ طالب فى العلوم ، ٢٠ طالب فى المادتين فإذا أختير طالب عشوائياً فأوجد إحتمال أن يكون الطالب المختار
ﺃ) ناجحاً فى الرياضيات
ب) راسباً فى العلوم
حـ) راسباً فى المادتين

(٧) إذا كان أحد الأندية يلعب ٣٠ مباراة فى إحدى المسابقات المحلية وكان إحتمال فوزه فى هذه المباريات ٠,٤ ، و إحتمال تعادله ٠,٣ فأوجد عدد المباريات التى يتوقع أن :
ﺃ) يفوز بها　　ب) يتعادل فيها　　حـ) يخسرها

(٨) فى دراسة لمعرفة عدد ساعات العمل التى يفضلها ٥٠٠ عامل فى أحد المصانع كانت النتائج بالجدول التالى :

عدد ساعات العمل	٥	٦	٧	٨	٩	المجموع
عدد العمال	٧٠	٢٥٠	١٢٠	٣٧	٢٣	٥٠٠

فإذا أختير أحد العمال عشوائياً فما إحتمال أن يكون مفضلاً العمل :
ﺃ) ٥ ساعات يومياً　　ب) أكثر من ٧ ساعات يومياً
حـ) أقل من ٨ ساعات يومياً　　ء) من ٦ ساعات إلى ٨ ساعات يومياً

(٩) صندوق به كرات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ١٦ سحبت كرة عشوائياً فما إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة تحمل:
أ) عدد يقبل القسمة على ٦
ب) عدد أولى
حـ) عدد لا يقبل القسمة على ٢

(١٠) فى لعبة الدوارة إذا كان القرص مقسم إلى عدد من القطاعات المتساوية وكان لون إثنين منهم أخضر ، و أربعة آخرين لونهم أزرق ، و الباقى لونه أحمر فإذا كان إحتمال وقوف المؤشر عند اللون الأخضر هو $\frac{١}{٦}$ أوجد عدد القطاعات الحمراء

(١١) لاعبان فى فريق لكرة القدم و فى أثناء التدريب سدد أحدهما ٢١ ركلة جزاء فأحرز منها ١٨ هدفاً ، و سدد الآخر ٣٢ ركلة جزاء فأحرز منها ٢٥ هدفاً من منهما تختاره لتسديد ضربة الجزاء أثناء المباراة ؟ و لماذا ؟

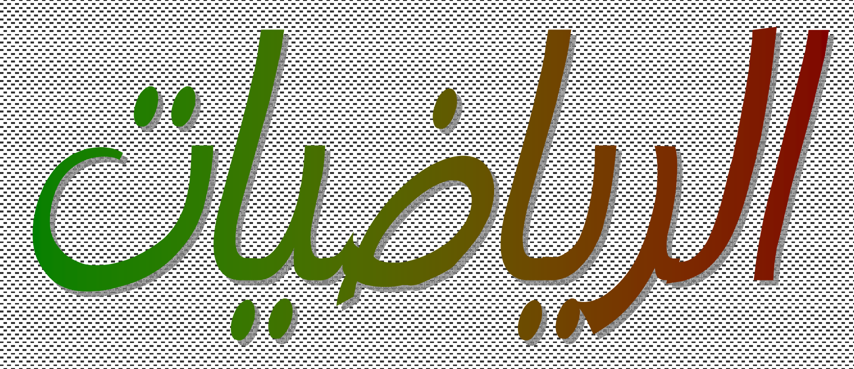
(١٢) سحبت بطاقة من مجموعة بطاقات مرقمة من ١ إلى ن فإذا كان إحتمال أن تكون البطاقة المسحوبة عليها رقم أكبر من ٨ هو $\frac{١}{٣}$ أوجد قيمة ن

(١٣) إذا كان إحتمال نجاح طالب فى إمتحان هو ٠,٨٧ فما إحتمال رسوبه

(١٤) فصل دراسى فيه نسبة عدد البنين إلى عدد البنات كنسبة ٣ : ٤ فإذا أختير طالب عشوائياً من هذا الفصل فما إحتمال أن يكون الطالب المختار :
أ) ولد　　　،　　　ب) بنت

(١٥) إختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :
١ – أى مما يلى يمكن أن يكون إحتمال وقوع أحد الأحداث :
(١,٣ ، − ٠,٤ ، ٣١٥ ٪ ، ٧٥ ٪)
٢ – فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم إحتمال ظهور عدد أكبر من ٤ = ٠٠٠٠
($\frac{١}{٦}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٥}$ ، ١)
٣ – إذا كان إحتمال وقوع حدث ما هو ٠.٧ فإن إحتمال عدم وقوعه = ٠٠٠٠
(− ٠,٧ ، − ٠,٤ ، ٠,٤ ، ٠,٧)
٤ – إذا ألقيت قطعة نقود مرة واحدة فإن إحتمال ظهور صورة = ٠٠٠٠
($\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$ ، ١)
٥ – أختير عشوائياً حرف من حروف كلمة مدرسة فإحتمال أن يكون الحرف هو س = ٠٠٠٠
($\frac{١}{٥}$ ، $\frac{٢}{٥}$ ، $\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٤}{٥}$)
٦ – إحتمال الحدث المستحيل = ٠٠٠٠
(صفر ، − ٠,١ ، ١ ، ∅)


سلسلة
المميز
فى


الرياضيات


المميز
فى
الجبر
المرحلة الثانية
للثانوية العامة
أحمد الشنتورى
المميز
فى
الجبر
المرحلة الأولى
للثانوية العامة
أحمد الشنتورى


أحمد الشنتورى
AHMEDSHANTIRY

